This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

600015151J

PRESS
SHELF
No

C

1841 d. 35/1

COURS

D'ASTRONOMIE

RADCLIFFE LIBRARY
UNIVERSITY
10 OCT 9
MUSEUM
OXFORD

PARIS. - IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

COURS
D'ASTRONOMIE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR

H. FAYE,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
Inspecteur général de l'Enseignement supérieur,
Professeur à l'École Polytechnique.

PREMIÈRE PARTIE.

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE. — DESCRIPTION DES INSTRUMENTS.
THÉORIE DES ERREURS.
GÉODÉSIE ET GÉOGRAPHIE MATHÉMATIQUE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1881

(Tous droits réservés.)

AVERTISSEMENT.

Le Cours de l'École Polytechnique ne comprend qu'une trentaine de séances, dans lesquelles il faut exposer l'Astronomie sphérique, la théorie des instruments, celle des erreurs, l'Astronomie solaire, la théorie des planètes et des comètes, celle de la Lune, et l'application de cette science si vaste à la Géodésie, à la Géographie et à la Navigation. Pour traiter convenablement ces parties essentielles, on a dû sacrifier l'Astronomie sidérale et l'Astronomie physique, malgré le vif intérêt que ces branches dérivées de la science mère présentent aujourd'hui. L'enseignement supérieur, donné dans nos Facultés, se mouvant dans les mêmes limites, j'ai cru qu'un Livre ainsi restreint aux parties essentielles serait utile à tous les étudiants. Il contient d'ailleurs tout ce qu'il faut pour mettre le lecteur en état d'aborder des études plus approfondies et plus complètes.

Mais j'ai dû penser aussi à ceux qui n'iront pas au delà de ces programmes. C'est pourquoi je me suis attaché à la filiation historique des idées et des découvertes. L'Astronomie est la plus vieille des sciences; son passé remonte, par d'authentiques documents encore utilisés aujourd'hui, à près de trois mille ans, et son histoire, depuis les premiers âges jusqu'aux temps modernes, offre une série de phases parallèles au développement séculaire de l'esprit humain. C'est pour elle que la Géométrie est née;

c'est pour ses exigences que l'Analyse moderne a été créée avec ses puissantes ressources; elle offre les premiers bégayements de la Mécanique et aussi ses plus beaux développements; enfin c'est là qu'il faut chercher et apprendre la véritable méthode scientifique. Il m'a donc semblé que je ne devais pas suivre ici le mode d'exposition plus rapide qui convient aux sciences de pur raisonnement ou aux sciences d'observation nées d'hier.

J'ai été conduit ainsi à allonger cet Ouvrage et finalement à lui donner deux Volumes, sans pour cela le faire sortir du cadre primitif.

Ce premier Volume contient l'Astronomie sphérique, c'est-à-dire l'étude du mouvement diurne de la Terre, la description des instruments et des observatoires, la théorie des erreurs, dont les utiles méthodes ne sont pas assez connues chez nous, la Géodésie, science toute française que tous les peuples civilisés s'attachent aujourd'hui à développer, enfin la Géographie mathématique. Le second Volume traite de l'Astronomie solaire, des planètes, des comètes, de la Lune et des applications à la Navigation.

SYMBOLES ET CONVENTIONS.

Coordonnées horaires des astres : $\mathcal{H}$, δ.

$\mathcal{H}$, angle horaire compté de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, dans le sens du mouvement diurne du ciel (vers l'ouest), à partir de la région supérieure et australe du méridien local.

δ, distance polaire, comptée de 0° à 180°, à partir du pôle nord, en tout climat.

Coordonnées zénithales : A, z.

A, azimut astronomique ou géodésique, compté, en tout climat, de 0° à 360° à partir du point S. de l'horizon, dans le sens S.-O.-N.-E.

z, distance zénithale, comptée de 0° à 180°, à partir du zénith.

z_1, distance zénithale apparente, affectée de la réfraction.

Mesure du temps.

H, heure sidérale du lieu, comptée de 0^h à 24^h à partir de l'instant du passage du point γ au méridien du lieu.

γ, point vernal, nœud ascendant de l'écliptique sur l'équateur.

H_p, heure sidérale à Paris.

m, marche ou retard diurne de la pendule.

Coordonnées géographiques.

L, longitude du lieu, comptée de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, dans le sens direct (vers l'est), à partir du méridien de Paris.

λ, colatitude du lieu, comptée en tout climat à partir du pôle nord, de 0° à 180°.

Coordonnées uranographiques.

Æ, ascension droite d'un astre, comptée de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, dans le sens direct (vers l'est), à partir du méridien céleste du point γ.

δ, distance angulaire d'une étoile au pôle nord, comptée, comme plus haut, de 0° à 180°.

Théorie des erreurs.

n, nombre des observations.
erreur moyenne d'une observation.
r_1, erreur probable.
h, mesure du degré de précision d'une série d'observations.
p, poids d'une observation.

Coordonnées géodésiques.

r, rayon de la Terre supposée sphérique.
a, demi-grand axe de l'ellipsoïde terrestre.
e, excentricité du méridien.
μ, aplatissement.
ψ, angle de la verticale d'un lieu avec le rayon de l'ellipsoïde terrestre ρ.
N, grande normale.
R, rayon de courbure du méridien.
A, B, C, angles dièdres des triangles sphériques.
a, b, c, côtés géodésiques.
v, angle au centre correspondant à un de ces côtés.

Symboles mathématiques.

log, logarithme ordinaire.
$\mathcal{L}$, logarithme népérien.
n, mis après un logarithme, rappelle que le nombre correspondant doit être pris avec le signe .
e, base des logarithmes népériens.
φ, angle auxiliaire.
δ, symbole qui remplace d dans les expressions différentielles, lorsqu'on donne à celles-ci des valeurs très petites, mais finies.

Doubles emplois.

e, excentricité dans les cercles divisés; excentricité de l'ellipse terrestre; base des logarithmes népériens.
ρ, réfraction astronomique ou géodésique; rayon local de l'ellipsoïde terrestre.
m, marche diurne de la pendule; coefficient de la réfraction géodésique.

COURS

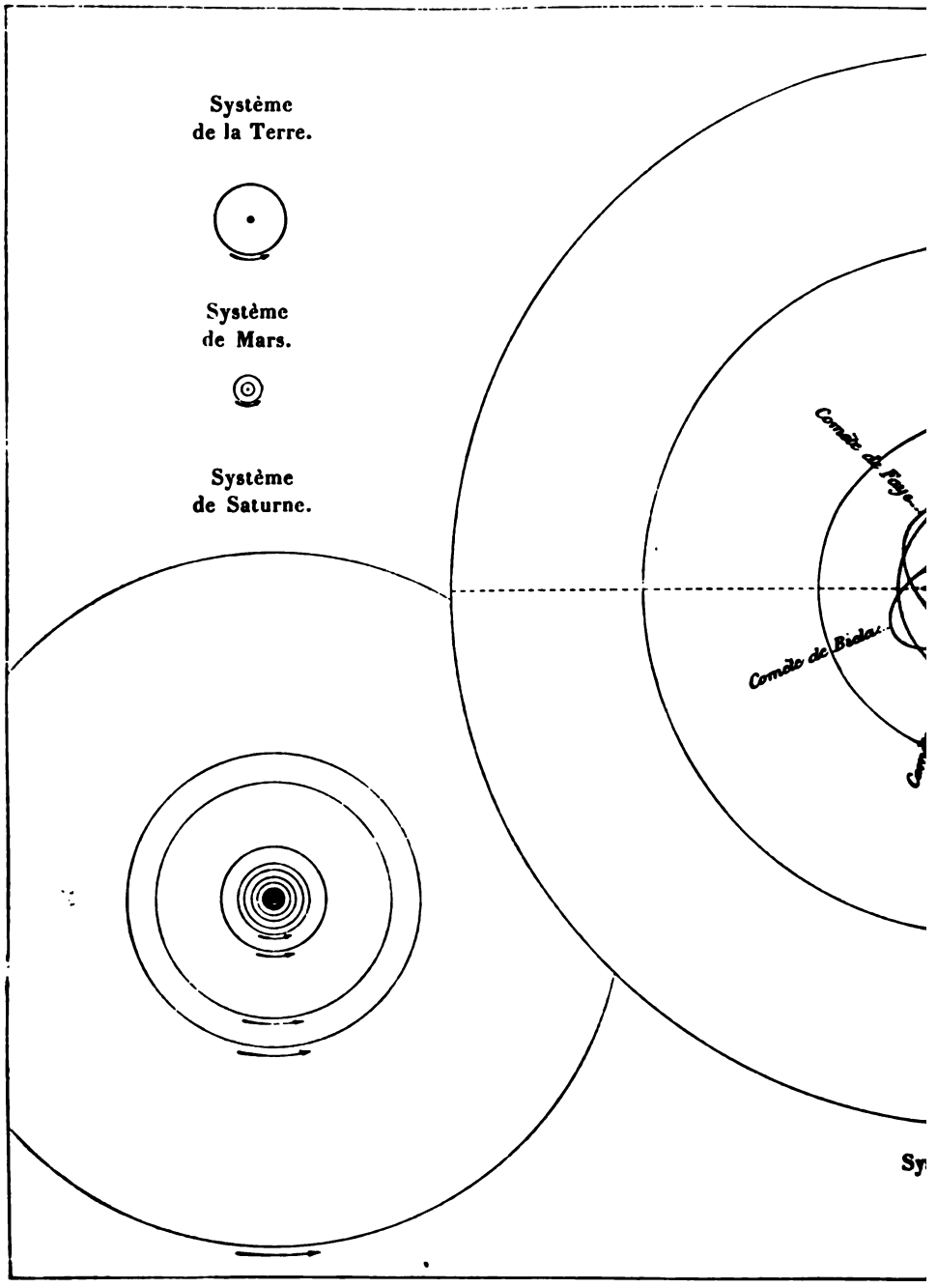
D'ASTRONOMIE

INTRODUCTION.

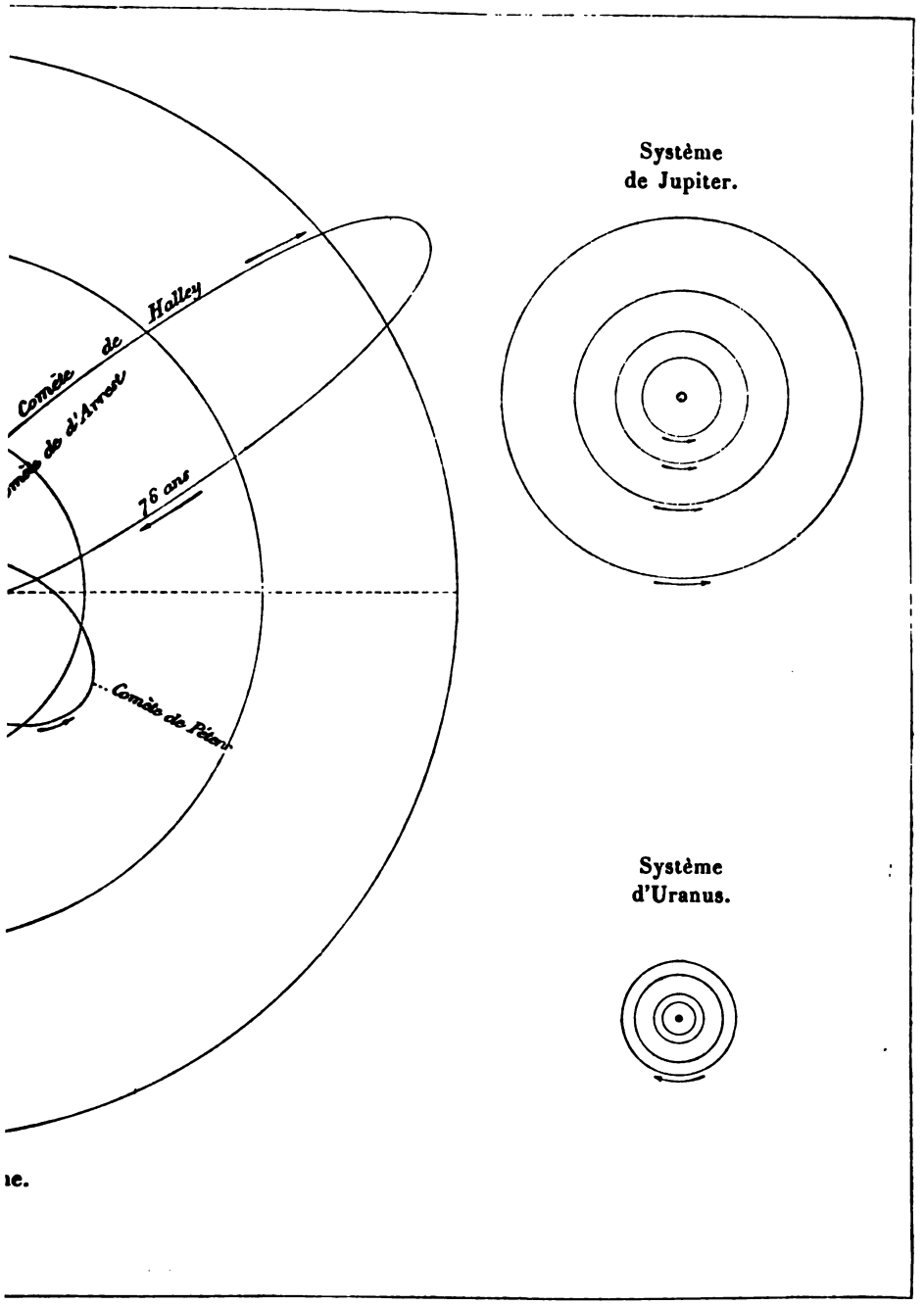
Distinction fondamentale entre le monde solaire et l'univers.

Les étoiles que nous voyons briller au ciel sont de vrais soleils comme le nôtre, c'est-à-dire des globes considérables, sièges d'une vive incandescence et animés de mouvements divers. Le Soleil n'a rien qui le différencie physiquement des étoiles innombrables dont l'espace indéfini est peuplé, mais, pour nous, il a cela de particulier que nous lui appartenons ; il est le centre d'un groupe de petits corps obscurs et froids parmi lesquels notre globe, la Terre, occupe son rang ; ces globes reçoivent de lui la lumière et la chaleur ; ils l'accompagnent dans son mouvement de translation. L'ensemble des étoiles ou des soleils est l'univers ; le petit groupe dont nous venons de parler, avec l'étoile qui lui sert de centre, est le monde solaire.

L'univers forme probablement un tout dont les limites nous échappent ; s'il est régi par des lois dans son ensemble, ces lois sont inconnues ; il n'y a guère d'espoir que l'esprit humain s'élève jamais jusqu'à elles. Le monde solaire, au contraire, est un tout limité, bien circonscrit ; par sa simplicité, par une heureuse réunion de circonstances favorables, ses mouvements intérieurs sont accessibles à l'analyse : l'étude de ces mouvements est un simple problème de Mécanique et ce problème a été si complètement ré-



SYSTÈME SOLAIRE. — Orbite



ıe.

ı et des comètes périodiques.

solu, que l'Astronomie est aujourd'hui en possession non seulement de se représenter fidèlement ses états antérieurs, mais encore de prédire avec une précision singulière son état futur à une date quelconque. L'Astronomie sidérale, qui traite des étoiles, de leur distribution dans l'espace, de leur groupement plus ou moins arbitraire en constellations, de leurs mouvements propres, de leur éclat et même de leur constitution chimique au moyen du spectroscope, est une science rudimentaire dont nous n'aurons pas à nous occuper, tandis que l'Astronomie proprement dite, celle du monde solaire, est, nous le répétons, une science achevée, digne de servir de modèle aux autres sciences. C'est pourquoi son étude est utile, non seulement pour les applications qu'on en fait chaque jour aux besoins de la société, mais encore à un point de vue plus général, en ce qu'elle donne la vraie mesure de ce que peut l'esprit humain quand il s'attaque à un problème, non pas indéfini comme l'univers, mais nettement circonscrit comme notre petit monde.

Cette distinction fondamentale date de trois siècles à peine. L'antiquité se faisait une tout autre idée des choses. C'est qu'elle avait à surmonter et qu'elle n'a pas su résoudre une difficulté inévitable, tenant à ce que l'observateur est incorporé pour ainsi dire au petit ensemble dont il fait partie. Placé près du Soleil et à une distance immense des autres étoiles, il lui a été longtemps impossible de saisir leur intime analogie. Les planètes qui circulent comme la Terre autour du Soleil et ne brillent que de sa lumière lui faisaient l'effet d'étoiles comme les autres. Enfin l'observateur terrestre participe à tous les mouvements de la Terre; mais, comme il n'a pas de sens particulier qui l'en avertisse, il les a niés tout d'abord avec la plus intime conviction et a débuté, en Astronomie, par attribuer ses propres mouvements aux astres qui l'entourent.

En revanche, la circonstance principale qui a permis de pousser si loin l'étude du monde solaire, c'est son indépendance presque absolue vis-à-vis du reste de l'univers, notion toute moderne sur laquelle nous aurons occasion de revenir. Quand on n'a en vue que ses mouvements intérieurs, tout se passe en effet comme si les autres soleils, les autres mondes, les autres systèmes stellaires n'existaient pas. C'est ce que nous allons faire voir en transportant l'observateur hors du système solaire pour le lui faire embrasser d'un coup d'œil et lui donner en même temps une idée de l'énorme

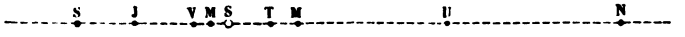
distance qui le sépare des astres les plus voisins; ensuite nous replacerons l'observateur sur le globe terrestre et nous analyserons les impressions bien différentes que le même spectacle fera alors sur lui.

Le système solaire vu de dehors.

La *fig.* 1 représente cet ensemble vu de face à l'échelle de $\frac{1}{60\,000\,000\,000\,000}$. Le Soleil est marqué au centre par un simple point, car ses dimensions sont évanouissantes à cette échelle. Autour de lui circulent huit planètes principales, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, et, entre Mars et Jupiter, deux cent quatorze petites planètes qui ont été découvertes successivement dans le cours de ce siècle.

Toutes ces planètes circulent de droite à gauche dans des plans peu inclinés les uns sur les autres, en sorte que, si l'on regardait cet ensemble par la tranche, on verrait à un moment donné les pla-

Fig. 2.



nètes distribuées à droite et à gauche du Soleil, presque en ligne droite (*fig.* 2).

Ces orbites, sauf celles des petites planètes, sont séparées les unes des autres par des intervalles croissants.

Nous avons dit que ce système présentait une disposition intérieure favorable à l'application de l'Analyse. Ces circonstances favorables sont :

1° La prédominance du corps central. Nous verrons en effet que la force qui règle ces mouvements est proportionnelle aux masses, et que celles des planètes sont le plus souvent négligeables.

2° Les grandes distances qui séparent les orbites l'une de l'autre. Nous verrons, en effet, que cette force varie en raison inverse du carré des distances, en sorte que les actions mutuelles des planètes, déjà si faibles à cause de leurs masses insignifiantes, sont encore affaiblies par leurs grandes distances.

3° Le sens de leurs mouvements, qui est le même pour tous, la presque parfaite circularité de leurs orbites et leur faible inclinaison mutuelle sont des circonstances éminemment favorables.

4° Enfin et surtout l'indépendance presque absolue par rapport au reste de l'univers. Pour s'en faire une idée, il faudrait marquer sur le plan du système solaire (*fig.* 1) les étoiles les plus rapprochées de nous. Imaginons que la feuille de papier sur laquelle a été tracé ce plan soit prolongée de 2400^m en tous sens : ce sera seulement à l'extrême bord de cette énorme feuille qu'on commencera à marquer une vingtaine d'étoiles, les plus voisines de nous. Il est aisé d'en apprécier l'action sur notre système. Elle est proportionnelle à leur masse et en raison inverse du carré de la distance. Or l'attraction de notre Soleil sur la Terre, placée si près de lui, se réduit à lui imprimer en une seconde une accélération de $0^m,006$. Cette même force, agissant sur une des étoiles les plus voisines, placée un million de fois plus loin, lui imprimerait une vitesse égale à

$$\frac{0^m,006}{10^{12}}.$$

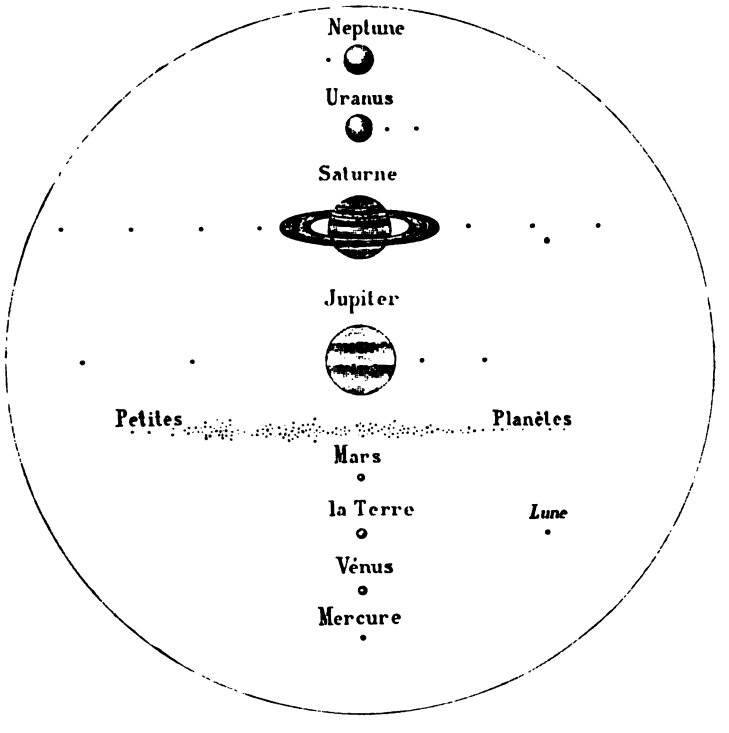
Réciproquement, cette étoile, en lui supposant une masse égale à celle du Soleil, communiquerait une accélération de même grandeur à notre système. Mais un mouvement commun à tous les membres de ce système ne saurait altérer leurs mouvements relatifs, les seuls que nous ayons intérêt à connaître. Ce n'est donc que par la différence des actions que l'étoile étrangère exerce sur ces différents membres qu'elle pourrait en troubler le système. Cette différence d'action, cette force perturbatrice, est bien proportionnelle à la masse troublante, mais elle varie en raison inverse du cube de la distance. Il faudrait donc mettre au dénominateur de l'expression précédente le cube de 1 000 000, c'est-à-dire 10^{18}. A la vérité, il s'agit d'un nombre énorme d'étoiles et non d'une étoile unique; mais ces étoiles sont à des distances très différentes; la plupart d'entre elles sont probablement dix et même cent fois plus éloignées que celle sur laquelle nous venons de raisonner.

Concluons que, dans l'étude de notre monde, on est parfaitement en droit de faire abstraction de l'univers. Du reste la distance qui sépare les étoiles entre elles est du même ordre, en général, que celle qui nous en sépare nous-mêmes, en sorte que les petits systèmes qui pourraient exister au loin, autour d'elles, jouiraient de la même indépendance.

Continuons l'examen des mouvements intérieurs de notre sys-

tème. Toutes les grandes planètes, sauf Vénus et Mercure, sont accompagnées de satellites circulant autour d'elles et retenues par l'attraction de la planète centrale. Ce sont de vraies miniatures du système formé par les planètes autour du Soleil. Pour donner une idée des grandeurs relatives de ces mondes partiels, on a représenté dans la *fig.* 3 le disque entier du Soleil, et à l'intérieur, à la

Fig. 3.



même échelle, on a figuré les planètes et leurs satellites, ainsi que l'essaim des petites planètes (au nombre de deux cent quatorze actuellement) qui circulent entre les orbites de Mars et de Jupiter. Ces satellites, tout en circulant autour de leurs planètes respectives, les accompagnent dans leur mouvement de révolution autour du Soleil. Cette figure montre combien ces petits systèmes secondaires sont insignifiants vis-à-vis du monde solaire dont ils font partie.

Le Soleil tourne autour d'un certain axe perpendiculaire, à quelques degrés près, au plan général du système solaire. Le sens de

cette rotation est le même que celui de la circulation de toutes ces planètes, c'est-à-dire direct.

Les planètes tournent aussi sur elles-mêmes, et leurs satellites circulent autour d'elles dans le même sens. Mais ici il faut remarquer une singulière anomalie. Le système solaire se divise en deux régions : dans l'une, l'intérieure, qui va jusqu'à l'orbite de Saturne, les rotations de toutes les planètes et les circulations de leurs satellites sont directes ; dans l'autre, l'extérieure, qui comprend les orbites d'Uranus et de Neptune, toutes les circulations de satellites sont rétrogrades.

Les rotations sont d'une grande lenteur ; il n'en est pas de même des vitesses linéaires de circulation. La Terre, par exemple, se meut à raison de 7,4 lieues par seconde. On comprend d'abord difficilement qu'avec une pareille vitesse la faible attraction centrale du Soleil la maintienne dans son orbite à peu près circulaire ; mais, si l'on considère que le rayon de ce cercle est de 37 000 000 de lieues, on trouvera que la force centrifuge provenant de cette circulation, c'est-à-dire $\frac{V^2}{R}$, se réduit à $\frac{54}{37\,000\,000}$ exprimée en lieues ou à $0^m,006$ environ, et qu'elle est parfaitement équilibrée par l'attraction du Soleil.

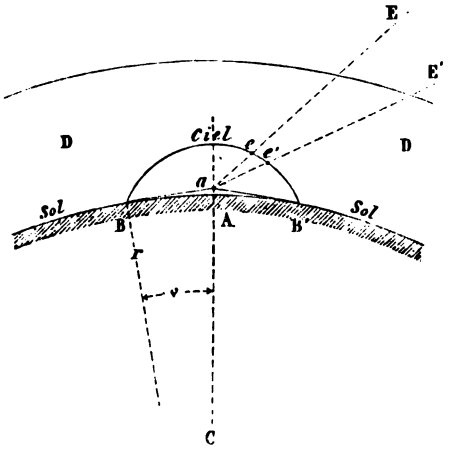
Ainsi le système solaire est un ensemble de corps obéissant à leurs attractions mutuelles, parmi lesquelles celle du Soleil est de beaucoup la force prépondérante. Tous ces corps circulent autour de leur commun centre de gravité, placé très près du Soleil ; en outre, ce centre de gravité se meut lui-même en vertu d'actions extérieures inconnues. Sa direction et surtout sa vitesse sont mal déterminées ; on sait seulement qu'il marche, avec son cortège de planètes, vers la région de l'espace où se trouve un groupe d'étoiles formant la constellation d'Hercule.

Le système solaire vu de la Terre.

Replaçons maintenant l'observateur sur son globe. Il ne le verra plus, comme tout à l'heure, sous la forme d'une boule dont son regard embrassait une moitié entière ; son contour apparent sera déterminé par le cercle de contact d'un cône circonscrit à ce globe et ayant son sommet à l'œil du spectateur ; mais ce cône se

réduit presque à un plan, et la partie visible à un élément circulaire de la surface. Soient (*fig.* 4) A$a = h$ la hauteur de l'œil, BAB′ une section centrale de la Terre, aB, aB′ deux tangentes issues du

Fig. 4.



point a ; BaC sera l'angle du cône complément de l'angle au centre v, et l'on aura, en désignant par r le rayon CB ou CA,

$$(r + h)\cos v = r$$

d'où

$$\sin \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} h}{r + h}},$$

expression qui se réduit à

$$v = \sqrt{\frac{2h}{r}}$$

en remplaçant le sinus par l'arc et en négligeant h vis-à-vis de r au dénominateur. Par suite

$$\text{arc AB} = rv = \sqrt{2hr}.$$

Pour tenir compte de la réfraction atmosphérique qui courbe légèrement le rayon visuel AB, il suffit, comme on le verra par l'étude de la réfraction géodésique, d'introduire sous le radical le facteur $\frac{8}{7}$, et, comme $r = 6366^{\text{km}}$, on aura finalement, h étant

donné en mètres,

$$\text{arc AB} = 3800^{m}\sqrt{h}.$$

Ainsi, l'œil étant à $1^{m},75$ au-dessus de la surface de la Terre, ce qui est la taille moyenne d'un homme, le rayon sphérique du cercle de contact qui comprend dans son intérieur la partie visible de cette surface se réduit à $1\frac{1}{4}$ lieue (¹). Ce cercle de contact prend le nom d'*horizon*. On voit que son plan se confond presque avec le plan tangent en A, ou même avec le plan horizontal passant par l'œil de l'observateur.

Une autre conséquence, c'est que la moitié à peu près de l'univers sera masquée par l'opacité du globe terrestre; l'observateur ne verra que les astres situés en dehors du cône circonscrit ou, si l'on veut, au-dessus de son horizon. Le plan de l'horizon et le prolongement Aa du rayon perpendiculaire à ce plan, c'est-à-dire la verticale de l'observateur, jouent un grand rôle en Astronomie. Comme la Terre est à très peu près sphérique, la résultante des attractions que toutes ses parties exercent sur un point quelconque de sa surface passe sensiblement par le centre et se confond avec un rayon; par conséquent, en chaque point, la direction de la pesanteur, si facile à obtenir par un fil à plomb, donne la verticale ou la direction du centre. La surface des eaux tranquilles devant être, pour l'équilibre, normale à la direction de la pesanteur, cette surface donne en chaque lieu le plan de l'horizon.

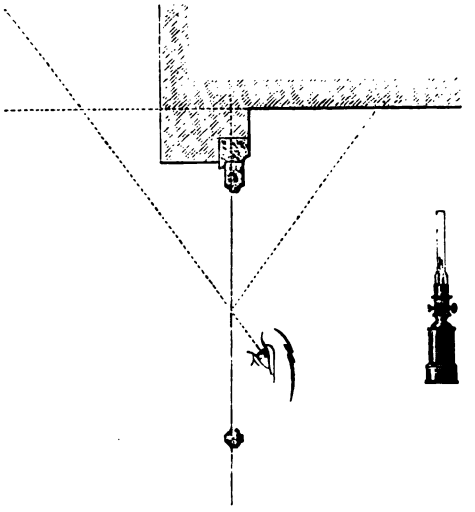
Voûte céleste.

Mais le globe terrestre est entouré d'une atmosphère gazeuse, transparente, à travers laquelle les rayons de lumière doivent passer pour arriver jusqu'à nous. L'interposition de cette atmosphère donne naissance à un remarquable effet de perspective aérienne. Les gaz ne sont pas d'une transparence absolue; ce défaut est encore singulièrement augmenté par les poussières de toutes sortes, solides ou aqueuses, que les couches les plus basses tiennent en

(¹) Les accidents du sol et surtout les montagnes se voient de beaucoup plus loin; il n'est question ici que de la surface géométrique de la Terre, telle qu'on la perçoit en pleine mer.

suspension. Ces particules opaques réfléchissent en tous sens la lumière du Soleil et forment la lumière diffuse ; celle-ci pénètre partout, produisant un éclairement général sans lequel nous tomberions dans une obscurité absolue dès que nous ne recevons plus les rayons directs du Soleil. Il y a plus : ces particules opaques, bien que disséminées, forment par leur ensemble un véritable fond de tableau B*ee*′B′ (*fig.* 4), sur lequel tous les objets, tels que E, E′, ... dont nos yeux ne peuvent apprécier la distance, vont se peindre en *e*, *e*′, ... comme s'ils y étaient attachés. Ce fond de tableau, purement atmosphérique, a la forme d'une calotte sphérique aplatie, dont l'axe vertical aboutit à l'œil du spectateur en *a*, et dont la base semble coïncider avec le cercle de l'horizon dont le diamètre est BB′. Sa couleur est bleue comme celle de l'air vu par transmission sur une grande épaisseur. Même la nuit, la faible clarté qui tombe des étoiles et la lumière qui vient par réflexion multiple des portions encore éclairées de notre atmosphère suffisent pour maintenir cette apparence. C'est ce qu'on appelle le *ciel*. Chaque spectateur a son ciel et son horizon qui le suivent partout où il se transporte sur le globe.

Fig. 5.



On reproduit aisément ce phénomène par l'expérience suivante (*fig.* 5). Dans une chambre faiblement éclairée par une lampe,

pendant la nuit, regardez le ciel à travers une des vitres de la fenêtre. Le plafond se réfléchira sur cette vitre faisant office de miroir et formera extérieurement une image symétrique du plafond, qui apparaîtra comme un voile sur lequel les étoiles se dessineront en perspective. Si l'on ménage convenablement l'éclairement intérieur, on croira les voir attachées à ce ciel plan, de même qu'elles nous paraissent fixées au ciel concave formé par l'atmosphère. Quant à cette forme du ciel, en voûte plus ou moins surbaissée suivant les circonstances atmosphériques, elle n'est pas facile à expliquer; j'ai entendu dire cependant à des aéronautes que le sol lui-même, ou la couche de nuages qui le cache à leur vue, semble se creuser de plus en plus à mesure qu'ils s'élèvent davantage. C'est comme un ciel inférieur qui tend à se former au-dessous de nous, concave comme le ciel supérieur. Il est possible que la forme de l'œil et de la rétine y soit pour quelque chose.

C'est à la forme surbaissée de cette voûte qu'il faut attribuer un phénomène bien connu, mais bien mal expliqué, à savoir les dimensions exagérées que prennent les astres, comme le Soleil ou la Lune et les constellations, quand on les voit près de l'horizon, tandis qu'au haut du ciel ils reprennent leur grandeur ordinaire. Ici la sensation de grandeur est complexe : elle dépend à la fois de l'angle sous lequel on voit le diamètre d'un objet et de la distance du tableau sur lequel il se peint pour nous. L'angle sous lequel on voit un astre ne change pas, mais le fond sur lequel il se projette est plus loin à l'horizon qu'au zénith. Ce n'est donc pas, comme on l'a dit, qu'en regardant un astre à l'horizon on voit en même temps des objets terrestres qui font mieux apprécier son éloignement: il suffit, en effet, de masquer ces objets avec la main pour constater que l'illusion ne change pas.

Cette apparence de voûte céleste, à laquelle il est impossible de se soustraire, a joué un grand rôle dans l'histoire de l'Astronomie. Les premiers hommes ont matérialisé dans leur imagination cette coupole bleue qui leur semblait comprendre tout l'univers. Tout comme les enfants, ils se sont imaginé qu'en marchant bien dans une même direction ils atteindraient le pied de cette voûte et verraient comment elle repose sur le sol. Les voyages, les migrations des peuples n'ont abouti qu'à leur donner une grande idée de son étendue. Pour eux, l'univers n'était rien de plus que le sol inébran-

lable et plan sur lequel nous marchons, et le ciel posé par-dessus comme une vaste cloche. C'est à ces illusions que se rattache la fable d'Atlas et d'Hercule soutenant le ciel sur leurs épaules. Les astres étaient tous renfermés sous cette voûte; ils s'y mouvaient sous la direction de divinités spéciales. Le Soleil lui-même, après avoir disparu chaque soir au couchant, se hâtait de regagner le levant pendant la nuit pour recommencer le lendemain sa course journalière.

Ce fut une grande révolution dans le domaine des sciences naissantes lorsqu'on se vit forcé de renoncer à cette conception naïve de l'univers, de reconnaître que la Terre est un globe isolé dans l'espace. Mais l'idée d'un ciel matériel résista : on en fit une vaste sphère solide tournant autour du globe terrestre et renfermant les astres dans sa concavité. Abordons maintenant la question des mouvements.

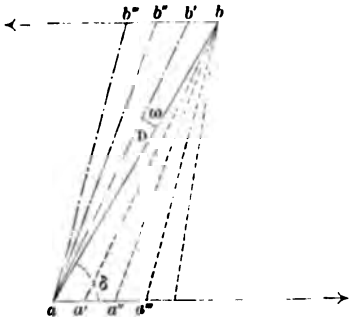
Le globe terrestre en a trois : un mouvement de translation rectiligne qui lui est commun avec le Soleil; sa rotation propre autour de l'axe de l'équateur; enfin sa circulation annuelle autour du Soleil. L'observateur n'en sent aucun; les objets terrestres qui l'entourent, le sol qui le porte, lui semblent jouir d'une immobilité parfaite. Il est dans la situation d'un voyageur en wagon, ou en bateau à vapeur, ou en ballon : il attribue ses mouvements en sens inverse à tous les objets extérieurs à la Terre.

Illusion provenant d'un mouvement de translation rectiligne.

Soient $aa'a''$... (*fig.* 6) la trajectoire de l'observateur, b un point fixe plus ou moins éloigné, ab la direction où ce point est vu à un moment donné. La position de b sera définie par l'angle $baa' = \delta$ et la distance $ba = D$. Si au bout d'une seconde l'observateur vient en a', l'objet sera vu dans une autre direction $a'b$; au bout de deux secondes dans la direction $a''b$ et ainsi de suite. Le changement de ces directions et, en certains cas, celui de la distance, seront les seules choses qui impressionneront le spectateur, car ses sens ne perçoivent pas le mouvement qui l'anime. Ayant au contraire le sentiment de son immobilité en un point quelconque de l'espace, en a par exemple, et voyant le point b changer de direction, il lui attribuera

un mouvement. Si l'on mène par le point a des lignes égales et parallèles aux droites ba', ba'', ba''', ..., mais de sens opposé, l'impression visuelle n'aura pas changé pourvu que le point b paraisse décrire $bb'b''$..., c'est-à-dire une droite égale et parallèle à la trajectoire de l'observateur, en sens opposé. Telle est en effet la tra-

Fig. 6.



jectoire apparente du point observé b. Il est aisé d'en déduire la vitesse angulaire apparente de ce point, la seule chose que la vue permette d'apprécier quand il s'agit des astres. En désignant aa' ou son égal bb' par v et par ω l'angle bab', on aura

$$\frac{v}{D} = \frac{\sin\omega}{\sin(\delta + \omega)},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\frac{v}{D}\sin\delta}{1 - \frac{v}{D}\cos\delta}.$$

Pour les astres, D est très grand par rapport à v et ω est un petit angle; on peut donc remplacer la tangente par l'arc et négliger les puissances de $\frac{v}{D}$ supérieures à la première dans le développement de ω, ce qui donne

$$\omega = \frac{v}{D}\sin\delta.$$

Ici ω est exprimé en parties du rayon; si l'on veut l'avoir en secondes, il faut multiplier le second membre par la valeur du rayon en secondes, c'est-à-dire par $206\,265''$. Nous reviendrons un peu plus loin sur ce point là.

Illusion provenant d'un mouvement de rotation.

L'observateur placé sur la Terre participe à sa rotation; le spectacle des objets terrestres tourne avec lui et rien ne l'avertit de son mouvement tant qu'il ne dirige pas ses regards vers des points extérieurs au globe, extérieurs même à notre atmosphère, car celle-ci tourne avec la Terre comme si elle faisait corps avec elle. En outre, comme il se trouve à quelque distance de l'axe de rotation, il aura un double mouvement : une circulation sur un petit cercle dont le rayon sera une perpendiculaire à l'axe, et une rotation autour d'une droite passant par l'œil et se transportant avec lui parallèlement à l'axe de la Terre. Nous ne considérerons d'abord que le second, le premier étant absolument négligeable quand il s'agit des étoiles, dont la distance est comme infinie par rapport aux dimensions de la Terre.

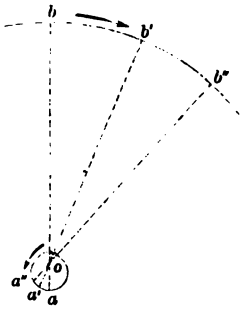
Soient (*fig.* 7)

O le centre optique de l'œil et en même temps la projection sur le plan de la figure de l'axe de rotation;

b un point extérieur au globe terrestre, situé dans le plan de la figure;

a l'image de ce point sur la rétine.

Fig. 7.



L'œil venant à tourner par l'effet de la rotation terrestre, l'image de l'objet *b* viendra se peindre successivement en différents points *a*, *a'*, *a''*, ... de la rétine.

Supposons que l'œil soit maintenu dans sa première position et

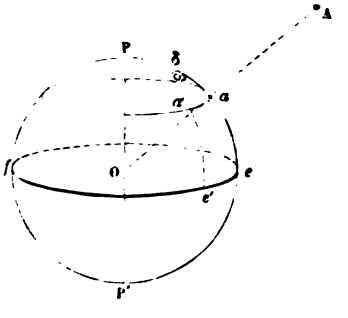
que l'objet b soit animé d'une vitesse angulaire autour du centre O égale et de sens contraire à la rotation; il est clair que son image se fera successivement aux mêmes points a, a', a'', ..., en sorte que les impressions perçues par l'observateur seront identiquement les mêmes dans les deux cas. Mais l'observateur n'a aucun sens qui l'avertisse de son mouvement, tandis que le sens de la vue lui montre le point b dans des directions différentes. Il attribuera donc sa propre rotation à ce point, et, comme il en est de même pour tous les astres, ceux-ci lui sembleront tourner autour de lui, en sens inverse de sa propre rotation, d'un mouvement angulaire commun, totalement indépendant de leur distance.

S'il s'agit de points situés d'une manière quelconque dans l'espace et non de points situés dans un plan passant par O perpendiculairement à l'axe, c'est-à-dire dans l'équateur de la rotation, l'observateur rapportera involontairement ces points à une sphère idéale, ayant son centre à l'œil en O. Il est clair que tous ces points paraîtront se mouvoir comme si la sphère sur laquelle ils se projettent tournait autour de l'axe de la rotation réelle avec la même vitesse, mais en sens renversé.

Soient (*fig.* 8)

PP' l'axe de la rotation;
a la perspective sphérique d'un point extérieur A;
Pae un arc de méridien;
$ee'f$ le cercle de l'équateur.

Fig. 8.



Si dans l'unité de temps la sphère paraît tourner de l'angle $\omega = eP e' = ee'$, le point a décrira dans le même temps l'arc aa',

dont l'extrémité se trouvera sur le méridien primitif transporté en Pe'. On aura donc, en désignant par δ la distance Pa du point a au pôle,

$$aa' = ee' \sin\delta = \omega \sin\delta.$$

Au pôle, où δ est nul, la vitesse sera nulle aussi; elle atteindra son maximum à l'équateur.

A partir de l'époque où l'on s'est aperçu que le ciel ne reposait pas sur la Terre, on en a fait une vaste sphère concentrique à la Terre et renfermant l'univers. Cette illusion s'est d'ailleurs merveilleusement combinée avec celle que nous venons de décrire. Partant toujours de l'idée préconçue que le globe terrestre est immobile, on a transporté sa rotation journalière en sens inverse à la sphère céleste, et, comme il serait absurde de supposer que des points très inégalement distants, comme le sont réellement les étoiles, s'accordassent à tourner tout d'une pièce autour d'un même axe, on a cru que les étoiles étaient des points brillants fixés dans la concavité de cette sphère tournante. De là vient le nom d'*étoiles fixes,* par opposition aux étoiles errantes ou planètes dont nous nous occuperons plus loin.

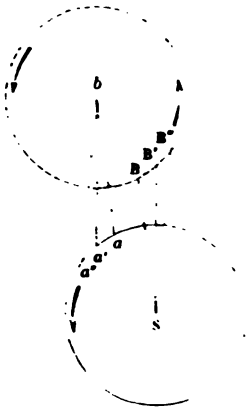
Illusion provenant du mouvement de circulation de la Terre autour du Soleil.

L'observateur parcourant le cercle $aa'a''\ldots$, un point quelconque fixe b (*fig.* 9), indépendant du globe terrestre, sera vu successivement dans les directions ba, ba', ba'', ... L'observateur, n'ayant aucune conscience de son mouvement, croira voir le point b se déplacer, et l'on obtiendra la trajectoire apparente de ce point en menant d'un centre quelconque où l'observateur se croira placé ([1]), par exemple du centre de la trajectoire réelle de la Terre, des droites SB, SB′, SB″, ... égales, parallèles, mais de directions opposées aux précédentes. Cette construction géométrique transporte évidemment au point b, comme centre, la tra-

([1]) Nous prenons pour centre un point quelconque, parce que la position de la Terre ou de l'observateur, dans l'espace absolu, n'est pas définie. Il suffit que dans nos constructions ou nos calculs les directions où nous voyons les astres soient conservées.

jectoire réelle, mais renversée, de la Terre, en sorte que ce même objet *b* sera vu en B, B′, B″, . . . sur cette trajectoire, animé d'une vitesse constamment égale et contraire à celle du spectateur *a*. Néanmoins, l'orbite apparente du point fixe sera décrite par B dans le même sens que l'orbite réelle de *a*. Il y a là une sorte de contradiction avec la loi générale d'après laquelle le spectateur transporte aux objets extérieurs son propre mouvement en sens

Fig. 9.



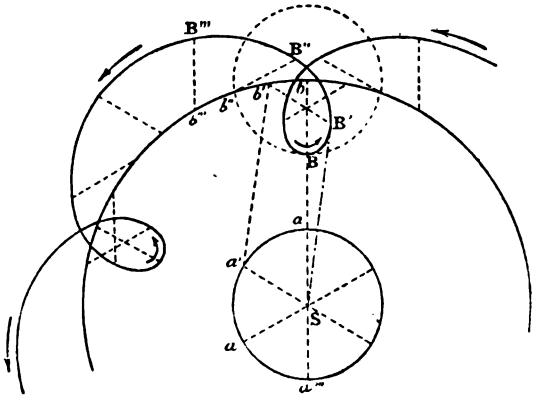
contraire, mais elle tient simplement à la nature du mouvement dans une orbite fermée, car il y a toujours, dans ce cas, pour chaque point de cette orbite, une région diamétralement opposée dans laquelle le mouvement s'opère en sens inverse. Ainsi l'astre B est toujours, sur son orbite apparente, de 180° en arrière de *a* sur la sienne. En effet, si l'on mène les rayons S*a* et *b*B, ces deux rayons seront évidemment égaux, parallèles, mais de sens opposés.

Ainsi toutes les étoiles du ciel, considérées comme des points fixes, nous paraîtront décrire en un an, durée de la circulation de la Terre autour du Soleil, une orbite précisément égale et parallèle à celle de notre globe. Nous donnerons plus tard les formules qui en permettent le calcul. Ce cercle décrit par chaque étoile porte le nom d'*épicycle annuel;* on en verra tout à l'heure la raison. La distance des étoiles les plus voisines étant énorme par rapport aux dimensions de l'orbite que la Terre décrit autour du Soleil, leurs orbites apparentes annuelles, vues de la Terre, ne sous-tendent pour

nous qu'un angle extrêmement petit, malgré leur diamètre commun de 74 millions de lieues. Il faut toute la puissance des plus grandes lunettes pour les rendre appréciables. Comme elles échappaient complètement à l'observation à l'œil nu, les contemporains de Copernic, peu préparés à concevoir un si gigantesque univers, en faisaient une objection au vrai système du monde. Nous allons voir que ces mêmes épicycles annuels, si peu sensibles pour les étoiles à cause de leur distance, sont au contraire très sensibles pour les astres voisins, c'est-à-dire les planètes, et s'y révèlent d'une manière frappante.

Les choses se passeront en effet de la même manière si le point b, au lieu d'être immobile comme nous venons de le supposer, se meut lui-même sur une courbe quelconque $bb'b''$ (*fig.* 10),

Fig. 10.



comme font les planètes; seulement sa trajectoire apparente se composera de deux mouvements, l'un réel qui lui appartient en propre, l'autre apparent qui provient de la circulation dont l'observateur est animé. Cette combinaison est une question de pure Géométrie. Pendant que le point apparent B décrit son épicycle annuel autour de la position vraie b, ce dernier décrit sa propre trajectoire, en sorte que la courbe résultante se réduit à une épicycloïde dont il est facile d'obtenir l'équation. Le cas le plus simple est celui où la trajectoire du point b est située dans le plan même de l'orbite terrestre. Construisons cette courbe par points sur l'épure ci-jointe. La planète étant en b' et la Terre en a',

on aura le lieu apparent de la planète, vue du centre S des mouvements de la Terre, où l'observateur se croit immobile, en menant SB′ égal, parallèle et de sens contraire à $b'a'$ ou, ce qui revient au même, en menant b'B′ égal, parallèle et opposé à Sa'. La même construction donnera les points suivants de l'épure. On obtient ainsi une épicycloïde à boucles dont les sommets se reproduisent chaque fois que les trois points S, a, b sont en ligne droite, c'est-à-dire lorsque la planète b, vue de la Terre a, est *en opposition* avec le Soleil. Sur une pareille courbe les mouvements des planètes sont très compliqués; en suivant le sens des flèches marquées sur la figure, on voit qu'à l'époque des oppositions la planète semble être animée d'un mouvement rétrograde; ailleurs elle marche dans le sens direct. Aux changements de sens, son mouvement s'effectue dans la direction du rayon visuel alors tangent à l'épicycloïde, et la planète semble s'arrêter. Ce sont les stations et rétrogradations des planètes. La période de ces apparences compliquées est facile à trouver quand on suppose que les mouvements réels sont circulaires et uniformes. Les deux planètes a et b ont pour vitesse angulaire $n = \frac{2\pi}{T}$, $n' = \frac{2\pi}{T'}$; en désignant par T et T′ la durée de leurs révolutions; par conséquent, leur vitesse relative sera $n - n'$. Si donc elles partent d'une opposition, elles se retrouveront de nouveau en opposition au bout d'un temps égal à $\frac{2\pi}{n - n'}$ (¹). Cette période se nomme la *révolution synodique* de la planète b; c'est une combinaison simple des durées des révolutions de la planète et de la Terre autour du Soleil.

Si l'orbite de la planète b n'est pas située dans le même plan que celle de la Terre ou du spectateur a, la trajectoire apparente sera une épicycloïde à double courbure.

A propos de la rotation de la Terre, nous décomposions le mouvement du spectateur en une rotation autour d'un axe parallèle à celui de notre globe, et une circulation de petit rayon et d'un jour de durée autour de cette dernière droite. L'observateur transporte aussi ce dernier mouvement à tous les points extérieurs;

(¹) C'est exactement le problème élémentaire bien connu de la rencontre des deux aiguilles d'une montre.

ceux-ci lui paraissent décrire en un jour une circonférence de même rayon autour de leur position vraie. C'est donc une nouvelle courbe épicycloïdale qui se superpose, comme une sorte de festonnage, à la précédente. Peu sensible sur les planètes éloignées, elle l'est davantage pour les planètes les plus voisines de nous.

Conception de l'univers dans l'antiquité.

On voit par là combien les mouvements apparents sont compliqués, tandis que les mouvements réels sont simples. De là deux systèmes astronomiques, celui des anciens et celui des modernes. Les anciens, fermement convaincus de l'immobilité de la Terre, étaient forcés d'attribuer en sens inverse tous ses mouvements aux autres astres : d'abord, à tous les astres, une rotation diurne rétrograde autour d'un axe commun passant par le centre du monde, c'est-à-dire de la Terre; puis, à tous les astres, la Lune exceptée, une orbite annuelle égale à celle de la Terre, mais renversée; enfin aux planètes, une combinaison de leurs mouvements réels avec l'épicycle d'un an, combinaison qui fait prendre pour des réalités des mouvements qui ne sont tantôt directs, tantôt rétrogrades qu'en apparence. Je ne parle pas de l'épicycloïde diurne, qui n'est sensible que pour les observations précises. Si l'hypothèse d'une Terre immobile ne s'était pas si fortement imposée à leur esprit, ils auraient aisément reconnu la simplicité des mouvements réels s'effectuant toujours dans le même sens autour du Soleil; ils auraient compris qu'il s'agit là, non pas d'un mécanisme à deviner, mais d'une question de Mécanique à résoudre; ils auraient vu que les planètes sont retenues dans leurs orbites par l'attraction du Soleil, et ils en auraient obtenu la mesure en comparant ces mouvements de circulation avec ceux que nous réalisons nous-mêmes lorsque nous faisons tourner une pierre au bout d'une corde et que nous étudions la manière dont la tension de celle-ci varie avec la vitesse. Ce qui a empêché pendant deux mille ans la Mécanique céleste, et par suite la Mécanique ordinaire, de naître dans l'esprit des profonds géomètres de l'antiquité, c'est cette intime persuasion de l'immobilité de notre globe. Elle les a conduits au système absurde que voici.

L'univers est contenu tout entier dans une grande sphère tour-

nante dont la Terre occupe le centre. Les étoiles sont fixées, attachées à sa concavité. Il y a sept planètes qu'on rangeait dans l'ordre de leurs distances probables à la Terre, à savoir la Lune, Mercure, Vénus, le Soleil, Mars, Jupiter et Saturne, et elles ont donné leurs noms aux sept jours de la semaine. Ces planètes sont attachées à des sphères concentriques, emboîtées dans la première. Pour expliquer le mouvement diurne du ciel, commun aux planètes et aux étoiles, on croyait que la sphère des fixes était animée d'une rotation rétrograde autour d'un certain axe nommé *axe du monde* et qu'elle entraînait les sept autres sphères dans son mouvement journalier, à peu près comme le premier mobile d'une horloge conduit toutes les autres roues. Quant aux planètes portées par ces sphères, on leur donnait du jeu pour expliquer les phénomènes si compliqués de leurs trajectoires, au moyen d'une combinaison de cercles et d'épicycles d'ailleurs identique à celle que nous venons d'exposer. On supprimait jusqu'à la possibilité d'établir quelque analogie entre les mouvements des corps terrestres, susceptibles d'être étudiés expérimentalement, et ceux des corps célestes, car on se trouvait amené à croire que ceux-ci étaient d'une nature plus noble, d'une essence supérieure, conduits par des intelligences divines. Enfin, comme toute machine fait du bruit, on assurait que les mouvements de ces sphères, y compris celle des *fixes*, produisaient des sons différents, et que, si nous ne percevons pas cette céleste harmonie, c'est que nous l'entendons depuis l'enfance et que nos oreilles y sont habituées.

Cependant ce système, malgré son absurdité, est encore en usage journalier parmi les astronomes aussi bien que dans le public, parce qu'il est l'immédiate traduction de nos impressions. On continue à dire que le Soleil se lève au lieu de dire que le plan de l'horizon de l'observateur s'est abaissé, par la rotation de notre globe, au-dessous de cet astre. On continue à représenter le ciel comme une sphère et les étoiles comme des points brillants qui y seraient attachés; on dit encore le mouvement diurne du ciel, comme si tout cela avait quelque réalité. Mais ce n'est là qu'un langage familier et commode dont nous allons faire usage à tout instant, sachant bien quelles sont les réalités masquées sous ces apparences.

Classification des étoiles et mesure de leur distance.

Les étoiles vues à l'œil nu sont entourées d'appendices lumineux qui n'ont d'existence que dans les humeurs de l'œil. Ces rayons disparaissent dans les télescopes, et les étoiles se réduisent alors à de simples points d'un vif éclat. Rien n'est plus propre à imprimer dans l'esprit d'un commençant l'idée de la grande distance où sont les étoiles que de lui montrer, l'une après l'autre, avec des grossissements de plus en plus forts, une planète de notre système, Jupiter par exemple, et une belle étoile quelconque. D'abord la planète présente un disque sensible; ce disque augmente à mesure qu'on augmente le grossissement; on finit par y distinguer les détails de sa figure. L'étoile, au contraire, reste toujours un point brillant (1), quel que soit le grossissement; sur les étoiles, en un mot, les plus puissants télescopes échouent complètement.

Les étoiles sont distribuées dans le ciel sans ordre apparent, comme au hasard. Cependant les petites étoiles se trouvent particulièrement accumulées dans une zone assez peu régulière qu'on nomme la *voie lactée*. Les astronomes les rangent en groupes fantastiques qu'on nomme *constellations,* groupes qui n'ont qu'une valeur purement mnémonique. Ils les classent, en outre, par ordre de *grandeur* ou plutôt d'éclat, car il ne saurait être question de grandeur pour de simples points sans dimensions appréciables. On en compte :

20	de 1re	grandeur,
65	de 2e	»
190	de 3e	»
425	de 4e	»
1100	de 5e	»
3200	de 6e	»

d'où il paraît bien que, si les étoiles diffèrent tant d'éclat entre elles, cela ne tient pas seulement à une inégalité réelle, mais aussi et surtout à la distance, c'est-à-dire à leur dissémination dans un espace de plus en plus grand. Au delà de la 6e grandeur, un œil ordinaire ne distingue rien de net. Il remarque seulement en

(1) Sauf un effet de diffraction dont il sera question plus loin.

certaines régions, telles que la voie lactée, une lueur diffuse produite par des étoiles trop petites pour être perçues isolément. En effet, pour l'œil armé d'une lunette ordinaire, cette lueur se décompose en étoiles qu'on classe comme les précédentes. On en compte ainsi :

13 000 de 7e grandeur,
40 000 de 8e »
142 000 de 9e »
.....

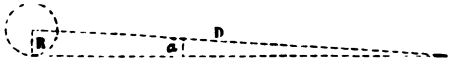
C'est, grossièrement, une progression géométrique ayant 3 pour raison.

Mais, si en certaines régions du ciel on voit les dernières étoiles de 10e, 11e, ... grandeur se projeter sur le fond noir du ciel, ce qui semble indiquer que l'œil atteint là les limites de l'univers, dans d'autres on retrouve encore cette vague lueur dont nous parlions tout à l'heure, lueur qui accuse la présence d'étoiles encore plus petites et plus éloignées de nous. Avec les puissants télescopes dont les astronomes sont armés aujourd'hui, on a compté 18000000 d'étoiles, jusqu'à la 15e grandeur, dans la seule voie lactée, mais sans atteindre encore la limite de l'univers stellaire.

Un tel ensemble, auquel il faut joindre d'autres corps tout différents des étoiles, les mystérieuses nébuleuses, échappe évidemment à notre faible entendement. Tout ce qu'on a pu faire par rapport à cet immense agrégat d'étoiles, parmi lesquelles notre Soleil ne compte que comme une étoile de moyenne grandeur, ç'a été d'essayer de mesurer la distance de quelques-unes d'entre elles.

Nous avons vu que toute étoile, comme d'ailleurs tout point de l'univers, hors la Terre et son satellite, paraît décrire en un an, autour de son lieu réel, une orbite égale et parallèle à celle de la

Fig. 11.



Terre, mais renversée. Si donc à l'aide d'une lunette on mesure les dimensions de cette orbite apparente, on aura, en désignant par R

(*fig.* 11) son rayon et par D sa distance, par 2α l'angle sous-tendu par le diamètre de cette orbite qui se présente perpendiculairement au rayon visuel, on aura

$$\sin\alpha = \frac{R}{D}.$$

R, ou la distance de la Terre au Soleil, est connu; on le prend pour unité de distance en Astronomie; α ayant été mesuré, on en conclut

$$D = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

On peut présenter les choses d'une autre manière. Pour déterminer la distance d'un objet inaccessible, les arpenteurs commencent par mesurer une base, puis de ses deux extrémités ils mesurent les angles à la base du triangle formé par cette ligne et l'objet. En résolvant ce triangle, on obtient la distance cherchée. Quand il s'agit des étoiles, il serait impossible de prendre une base sur le globe terrestre, car ses dimensions sont, comme nous allons le voir, évanouissantes vis-à-vis de la distance des étoiles. Mais le mouvement annuel de la Terre nous transporte, à six mois de date, aux deux extrémités d'un diamètre de son orbite, diamètre dont la longueur est de 74 millions de lieues. C'est là la base la plus grande dont nous disposions.

Si donc, à six mois de distance, on détermine la direction d'une étoile, on y trouve un léger changement, une *parallaxe* due au déplacement de l'observateur; en appelant 2R la base, 2α l'angle au sommet, on a, comme tout à l'heure,

$$D = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

La grande difficulté de ces mesures consiste en ce que la parallaxe est alors excessivement petite, presque du même ordre de grandeur que les erreurs dont ces observations sont susceptibles. Il arrive même que ces erreurs l'emportent sur la quantité à mesurer, en sorte qu'on trouve des résultats tout à fait erronés, par exemple une parallaxe négative, ce qui n'a aucun sens. Voici les mesures les moins incertaines que nous possédions à ce sujet :

Noms des étoiles.	Éclat.	Parallaxe ou α.	Erreur probable.	Distance en rayons de l'orbite terrestre.	Temps employé par la lumière de l'étoile à venir jusqu'à nous
					Années.
Étoile polaire..	2	0",03	± 0",02	6 870 000	108,0
La Chèvre.....	1	0,31	± 0,04	665 000	10,5
Sirius.....	(1)	0,20	± 0,10	1 031 000	16,3
Castor.....	2	0,21	± 0,06	982 000	15,5
Arcturus.....	1	0,13	± 0,08	1 587 000	25,0
α Lyre.....	1	0,20	± 0,03	1 031 000	16,3
α Cygne.....	2	—0,08	± 0,04	?	?
α Centaure.....	1	0,51	± 0,08	404 000	6,3
61e du Cygne...	5-6	0,35	± 0,08	589 000	9,3

Les distances sont ici exprimées à l'aide de l'unité astronomique, c'est-à-dire la distance moyenne du Soleil à la Terre. Pour en donner une idée plus saisissable, on l'a exprimée aussi par les temps que la lumière mettrait à les franchir. On verra plus loin que sa vitesse est telle, qu'elle n'emploie que huit minutes dix-huit secondes à venir du Soleil jusqu'à nous.

D'après ce Tableau, on voit que, sauf α du Centaure, les étoiles les plus voisines de nous ont en moyenne une parallaxe de 0",2 au plus, et par suite une distance de $\frac{R}{\sin 0'',2}$, ou environ un million de fois la distance de la Terre au Soleil (2).

Bien que les étoiles les plus brillantes ne soient pas nécessairement les plus proches, il y a lieu de croire que la plupart des étoiles moins brillantes sont encore plus éloignées.

Si le Soleil, dont le diamètre angulaire vu de la distance moyenne R = 1 est de 32' ou 1920", était relégué dans la région des étoiles les plus voisines, il serait vu d'ici sous un angle de

$$\frac{1920''}{1\,000\,000} = 0'',001920,$$

(1) Sirius est la plus belle étoile du ciel; son éclat est bien supérieur à celui des étoiles de première grandeur, telles que la Chèvre, la Lyre, Arcturus, etc.

(2) L'erreur probable de ce résultat est au-dessus de ± 0",05, c'est-à-dire du quart de la parallaxe ou de la distance conclue. Ainsi les astronomes n'ont pu déterminer la position de notre système dans l'espace (rapporté aux étoiles voisines prises comme repères) qu'avec une incertitude de plus de 250 000 rayons de l'orbite terrestre, c'est-à-dire de plus de 37 000 000 × 250 000 lieues.

quantité insensible; il nous apparaîtrait comme un simple point brillant, absolument comme les étoiles vues avec les plus puissants télescopes. Quant à la Terre, dont le diamètre est cent huit fois plus petit que celui du Soleil, elle n'aurait qu'un diamètre angulaire de 0″,000018.

Il découle de là deux conséquences capitales pour l'étude que nous allons entreprendre. La première, c'est que, l'épicycle annuel et à plus forte raison l'épicycle diurne étant insensibles pour les étoiles à cause de leur distance énorme, ces astres-là ne présentent qu'une seule des trois illusions dues aux mouvements de l'observateur, à savoir la rotation diurne apparente, tandis que les planètes sont affectées à la fois de ces trois mouvements. Il est donc tout indiqué de commencer l'Astronomie par les étoiles, non pour elles-mêmes, mais pour l'étude de la rotation de la Terre qui se trouvera ainsi dégagée de toute circonstance accessoire. La seconde conséquence, c'est qu'en raisonnant sur les étoiles nous serons en droit de faire abstraction des dimensions de notre globe et de le considérer, lui et tout ce qu'il porte, comme réduit à un simple point. La première partie de notre science se nomme *étude du mouvement diurne* ou *Astronomie sphérique*, parce qu'on y conserve la sphère céleste des anciens à titre de pure conception géométrique. Je veux dire que nous considérerons, non pas les étoiles elles-mêmes, dont nous n'aurons plus à nous occuper, mais leurs perspectives sur une sphère idéale d'un rayon infini par rapport à celui de la Terre, ces perspectives n'étant elles-mêmes que des points mathématiques.

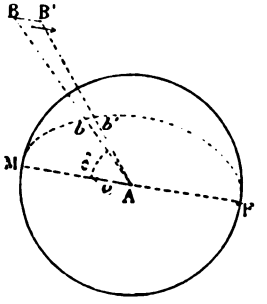
Mouvement de translation du système solaire.

Il n'affecte nullement les planètes, puisque le Soleil les entraîne avec lui, ainsi que la Terre. Examinons les mouvements apparents qui en résultent pour les étoiles.

Ici nous pouvons nous placer par la pensée sur le Soleil lui-même, au centre de la sphère étoilée dont nous venons de parler. Soit AM (*fig.* 12) la direction dans laquelle le Soleil marche, en sorte que le point M soit le point de mire du système solaire, et le point diamétralement opposé F son point de fuite. Considérons une étoile B et sa projection sphérique en *b*. D'après ce que nous avons vu,

l'observateur attribuera son propre mouvement en sens inverse au point B; celui-ci paraîtra décrire la ligne BB′ avec la vitesse même

Fig. 12.



dont le Soleil est animé. Sur la sphère, la projection b décrira donc le petit arc bb' dont les prolongements passeront par les points M et F. Sa vitesse angulaire ω sera donnée par

$$\omega = \frac{v}{D} \sin \delta,$$

en désignant sa distance linéaire au Soleil par D, sa distance angulaire au point M par δ et la vitesse linéaire du Soleil par v. Cette vitesse angulaire est la seule chose que nous puissions mesurer. Elle varie, d'une étoile à l'autre, avec D et δ. A distances égales elle est maximum pour $\delta = 90^\circ$, c'est-à-dire pour les étoiles situées sur le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à FM. On vient de voir que les étoiles sembleront décrire de très petits arcs de grand cercle divergeant du point M et convergeant vers le point F. Il y aura donc deux régions en M et en F où les étoiles resteront immobiles.

Comment peut-on découvrir par l'observation du ciel ce point M vers lequel marche le Soleil? Par un procédé très simple. Les astronomes ont déterminé depuis deux siècles, à plusieurs reprises, les positions des principales étoiles à la surface de cette sphère. En comparant des observations faites à de longs intervalles, ils constatent que les étoiles se sont déplacées quelque peu. Si ces mouvements étaient dus uniquement à l'illusion produite par la translation rectiligne du système solaire, il suffirait de porter ces petits arcs sur une sphère matérielle et de les prolonger pour obtenir,

par leurs points d'intersection, les deux points M et F. C'est ce qu'a fait Herschel pour une vingtaine d'étoiles les plus brillantes; il a trouvé, non pas un point, mais une région de convergence de ces arcs dans la constellation d'Hercule. Le même résultat a été obtenu par le calcul en employant plusieurs milliers d'étoiles. Il paraît donc bien établi que le Soleil marche effectivement dans cette direction.

Mouvements propres des étoiles.

Les étoiles se meuvent aussi bien que le Soleil, en sorte que la supposition précédente, sur laquelle est basée la recherche de notre point de mire, ne semble pas justifiée. Mais les petits mouvements propres des étoiles paraissent n'être soumis à aucune loi. Si donc ils offrent quelque chose de commun, ce ne pourra être qu'une tendance commune à diverger d'une région quelconque de la sphère, et alors on est en droit de l'attribuer à l'effet du mouvement propre de notre système. Dans la pratique, on ne tient nul compte de cette distinction entre les mouvements propres des étoiles et leur mouvement apparent dû à la translation de notre système. On détermine comme on vient de le dire, pour chaque étoile en particulier, le mouvement angulaire dont elle paraît animée, quelle qu'en soit la cause, et l'on trouve qu'il suffit d'un très petit terme proportionnel au temps pour être en état de ramener à une époque quelconque les coordonnées observées à une autre date. On est ainsi dans le même cas que si les étoiles étaient réellement et absolument fixes.

Ces corrections sont toujours très faibles, souvent même insensibles; elles ne s'élèvent guère, en général, qu'à des fractions de seconde et dépassent rarement 1″ ou 2″ par an. Cependant, dans la suite des siècles, leurs effets deviennent sensibles, même à l'œil nu, en s'accumulant. Arcturus, par exemple, a déjà franchi un demi-degré depuis le temps d'Hipparque, c'est-à-dire à peu près l'équivalent du diamètre angulaire de la Lune. A compter le temps par milliers de siècles, l'aspect des constellations en serait singulièrement modifié.

Les astronomes ne déterminent ainsi que la vitesse angulaire des étoiles, estimée perpendiculairement au rayon visuel. Nous ne sau-

rions rien sur l'autre composante, à savoir la vitesse estimée dans le sens du rayon visuel, si l'analyse spectrale n'avait trouvé, dans les petits déplacements des raies du spectre de chaque étoile, le moyen de mesurer cet élément. Seulement, cette fois, il ne s'agit plus de vitesse angulaire, mais de vitesse absolue, estimée à tant de kilomètres par seconde.

Mouvements propres de quelques étoiles dans la direction du rayon visuel (1).

	M. Huggins.	Observatoire de Greenwich.
α Orion	+ 22^{km}	+ 35^{km}
Sirius	+ 20	+ 32
Castor	+ 25	+ 40
Pollux	— 49	— 78
β Grande Ourse	+ 17 à + 21	+ 27 à + 34
α Grande Ourse	— 46 à — 60	— 74 à — 100
γ Grande Ourse	+ 17 à + 21	+ 27 à + 34
δ Grande Ourse	+ 17 à + 21	+ 27 à + 34
ε Grande Ourse	+ 17 à + 21	+ 27 à + 34
Arcturus	— 55	— 88
α Lyre	— 40	— 64
α Cygne	— 39	— 62

Le signe — désigne un mouvement vers l'observateur, le signe + le mouvement opposé.

(1) Nous donnons ici les résultats obtenus par M. Huggins, à qui est due cette remarquable découverte, et ceux qu'on a obtenus après lui à l'Observatoire de Greenwich, pour permettre au lecteur de juger à la fois de la réalité de ces mouvements et du faible degré de précision avec lequel on parvient à les estimer.

PREMIÈRE PARTIE.

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE. — DESCRIPTION DES INSTRUMENTS.

THÉORIE DES ERREURS.

GÉODÉSIE ET GÉOGRAPHIE MATHÉMATIQUE.

LIVRE PREMIER.

THÉORIE DU MOUVEMENT DIURNE DU CIEL.

Description du mouvement diurne apparent du ciel.

La Terre est un sphéroïde légèrement aplati qui tourne autour de son plus petit axe. L'espace où elle se meut, vide de toute matière, n'oppose aucune résistance capable d'altérer cette rotation. La Mécanique nous apprend que dans ces conditions la rotation est éminemment stable, c'est-à-dire qu'elle s'opère autour du même axe avec une parfaite uniformité, malgré les mouvements oscillatoires de l'atmosphère et des mers. D'autre part, la translation annuelle de la Terre autour du Soleil n'influe en rien sur la rotation ; l'axe de celle-ci reste toujours parallèle à lui-même et affecte par conséquent une direction absolument fixe ([1]). Nous avons dit que l'orbite terrestre vue des étoiles est imperceptible ; il en résulte que nous sommes en droit de négliger entièrement ce mouvement de translation et de raisonner comme si la Terre était immobile dans l'espace, sauf la rotation que nous allons étudier. D'ailleurs il est naturel de rapporter les étoiles à une sphère idéale ayant pour centre l'œil du spectateur et sur laquelle elles se projettent, car nous n'aurons jamais à nous occuper de leurs distances, mais seulement de leurs directions, et, comme les dimensions du globe terrestre sont absolument insensibles par rapport à ces distances, il n'y aura aucune distinction à faire entre les diverses régions de la Terre et l'œil de l'observateur ; tout cela se réduit à un simple point, centre de la susdite sphère céleste. Enfin, comme la rotation réelle de la

([1]) Nous faisons ici abstraction de la précession et de la nutation.

Terre engendre l'illusion de la rotation, en sens opposé, de tous les points extérieurs, nous raisonnerons comme si l'observateur était immobile au centre de la sphère céleste, tandis que celle-ci tournerait avec les étoiles autour de l'axe terrestre, dans le même temps, mais en sens inverse.

Si l'on examine le ciel pendant une nuit claire, on voit cette conception se réaliser; seulement il faut un peu de temps pour saisir la lente rotation des étoiles. En y revenant à plusieurs reprises, en rapportant les étoiles à des alignements pris sur des repères terrestres désormais considérés comme fixes, on constate le mouvement régulier dont elles sont animées. On voit les constellations se lever successivement sur l'un des bords de l'horizon, monter lentement dans le ciel, atteindre leur plus grande hauteur, puis décliner de l'autre côté et finalement disparaître au bord opposé de l'horizon. Le même phénomène affecte le Soleil et la Lune, ainsi que les planètes ou les comètes, dont nous aurons à nous occuper plus tard. Avec un peu d'attention on constate que ce mouvement s'effectue tout d'une pièce autour d'un axe incliné qui va percer le ciel très près de l'étoile α de la petite Ourse. Cette étoile semble ne pas bouger, parce que le cercle qu'elle décrit en vingt-quatre heures n'a guère que 1°20′ de rayon. Lorsqu'on se place par la pensée dans la direction de l'axe du monde, le sommet de la tête tourné vers cette étoile, on constate que la rotation apparente de la sphère céleste a lieu de gauche à droite, dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est le sens que les astronomes nomment *rétrograde* (1).

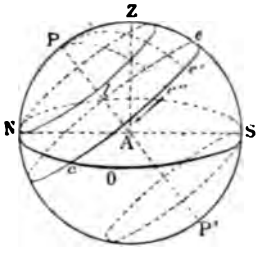
Enfin le jour vient; le Soleil se lève à l'horizon de gauche, c'est-à-dire à l'est ou au levant, et sa lumière, en éclairant l'atmosphère, efface toutes les étoiles pour l'œil nu. On peut suivre néanmoins les plus belles avec une lunette; elles restent visibles tout le jour, sauf dans la région la plus voisine du Soleil.

Les particularités de ce mouvement sont toutes géométriques. Désignons par SON (*fig.* 13) le cercle de l'horizon qui divise la sphère céleste en deux moitiés, l'une visible, l'autre invisible; par

(1) Par conséquent, la rotation réelle de la Terre, qui donne lieu à cette apparence, s'effectue de droite à gauche pour l'observateur ainsi placé, c'est-à-dire dans le sens direct.

PP′ l'axe incliné de la rotation diurne. L'observateur et la Terre tout entière étant en A, centre de cette sphère, si l'on mène AZ, verticale de l'observateur, cette droite, perpendiculaire au plan de l'horizon, sera l'axe de symétrie de la portion visible du ciel. D'autre part, l'axe AP est l'axe de symétrie de la rotation. Par conséquent, le plan SZPN, qui passe par ces deux axes, sera un plan de symé-

Fig. 13.



trie pour tous les phénomènes du mouvement diurne au-dessus de l'horizon. C'est le plan méridien du lieu A; sa trace horizontale SN est la méridienne. Le méridien vertical SZPN contient les points culminants de tous les parallèles décrits par les étoiles; il divise en parties égales et symétriques les portions visibles de ces parallèles, c'est-à-dire les arcs situés au-dessus de l'horizon. Ainsi du lever d'une étoile en *l*, jusqu'à l'instant de son passage au méridien en *e*, il s'écoule juste autant de temps que du méridien au coucher en *c*. Si par les points N et S on mène des plans perpendiculaires à l'axe du monde PP′, ces plans détermineront trois zones. L'intermédiaire est celle des étoiles qui se lèvent et se couchent. La calotte qui a pour centre le pôle visible P contient les étoiles qui ne se couchent jamais, c'est-à-dire dont les parallèles sont situés en entier au-dessus de l'horizon; la calotte qui a pour centre le pôle invisible P′ est celle des étoiles qui ne se lèvent jamais et que l'observateur ne peut voir tant qu'il restera au même point du globe terrestre.

Ces notions de pure Géométrie céleste vont nous permettre de rapporter les astres à un système de coordonnées sphériques et d'établir une mesure parfaite du temps.

CHAPITRE I.

SYSTÈMES DE COORDONNÉES USITÉS EN ASTRONOMIE.

Coordonnées locales des étoiles.

Le mot *locales* veut dire ici relatives à un lieu donné A. Si l'on considère une étoile quelconque e (*fig.* 13), il est évident que sa distance au pôle P de la rotation reste constante. Désignons cette distance polaire Pe, Pe', Pe'', ... par δ. D'autre part, la rotation étant uniforme, les angles dièdres SPe', SPe'', SPe''' seront proportionnels aux temps écoulés à partir de l'instant où l'étoile aura passé en e au méridien. Désignons cet angle dièdre variable par H, signe abréviatif des mots *angle horaire*. Nous pourrons prendre

$$\delta = \text{const.},$$

$$H \text{ proportionnel au temps}$$

pour les coordonnées sphériques de cette étoile ; elles en détermineront évidemment la position à un instant quelconque, si l'on donne la valeur de l'angle horaire H à cet instant et, une fois pour toutes, la distance polaire δ.

Nous conviendrons de compter H de 0° à 360° dans le sens du mouvement diurne, c'est-à-dire dans le sens rétrograde marqué par les flèches de la figure. L'instrument destiné à mesurer cette espèce de coordonnées porte le nom d'*équatorial;* on en trouvera plus loin la figure.

Tout instrument de ce genre doit avoir un axe de rotation qu'on dirige suivant l'axe même du système de coordonnées, c'est-à-dire ici suivant AP. Il doit en outre avoir une lunette fixée à un second axe de rotation perpendiculaire au premier. La lunette peut être placée excentriquement, car, vis-à-vis de la distance des étoiles, les dimensions de l'instrument ne comptent pas. En faisant tourner la lunette autour de son axe propre, la ligne de visée parcourt un

grand cercle du ciel passant par le pôle P. Si donc on fixe un limbe divisé à cet axe, on pourra mesurer la distance polaire d'un astre situé sur ce grand cercle. En faisant tourner tout l'instrument autour de l'axe AP, on amènera le plan décrit par la lunette à occuper successivement toutes les positions autour de AP, et, si cet axe principal porte lui-même un limbe divisé, on sera en état de mesurer l'angle horaire AI ou SPe' d'une étoile quelconque e'.

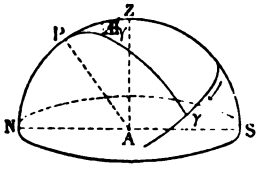
Mesure du temps. Jour sidéral. Heure.

Nous prendrons naturellement, pour mesurer le temps, la durée même de la rotation du ciel. C'est le temps compris entre deux retours consécutifs d'une même étoile à la même direction, ou bien entre deux passages successifs de cette étoile au méridien du lieu. Cet intervalle prend le nom de *jour sidéral* (il est plus court de quatre minutes que le jour solaire moyen, dont les astronomes font aussi usage).

Il se divise en vingt-quatre heures sidérales, l'heure en soixante minutes et la minute en soixante secondes.

Ce n'est pas tout que de fixer la durée du jour, il faut encore lui assigner une origine. Nous conviendrons de prendre, pour marquer en un lieu quelconque le commencement du jour sidéral, c'est-à-dire l'instant où la pendule sidérale doit marquer $0^h\ 0^m\ 0^s$, celui où un certain point du ciel, fixé par une convention, passera au méridien du lieu. Nous lui donnerons le nom de *point vernal* et

Fig. 14.



pour signe la lettre γ. Il serait assez difficile actuellement de définir ce point, dont le choix se rapporte à la théorie du Soleil; supposons simplement qu'il y ait là une étoile γ dont on puisse à tout instant mesurer l'angle horaire AI_γ.

Cet angle horaire varie de 360° en vingt-quatre heures, par con-

séquent de 15° en une heure, de 15′ en une minute et de 15″ en une seconde. Nous disions tout à l'heure qu'il varie proportionnellement au temps écoulé depuis l'instant du passage du point origine γ au méridien : ce temps n'est autre chose que l'heure sidérale H. On aura donc

$$\frac{1}{15}\mathcal{H}_\gamma = \mathrm{H},$$

et, comme rien ne nous empêche de diviser la circonférence en vingt-quatre parties égales appelées *heures* et de compter les angles par la même numération que le temps, nous écrirons dans ce système

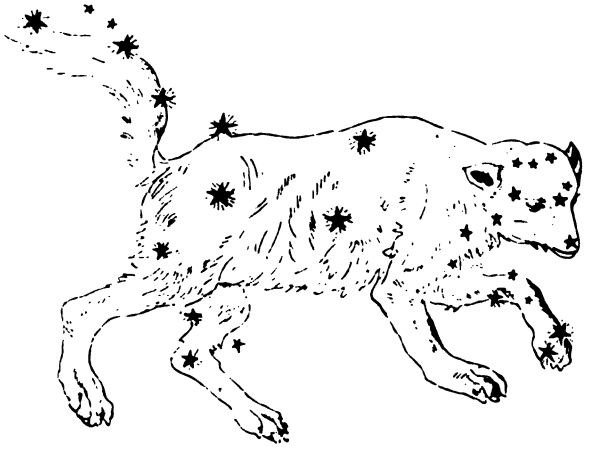
$$\mathrm{H} = \mathcal{H}_\gamma$$

et nous dirons que l'heure sidérale à un instant donné est égale à l'angle horaire du point γ à cet instant. Nous allons voir qu'à ce point γ on peut substituer une étoile quelconque dont les coordonnées uranographiques soient bien connues.

Coordonnées uranographiques.

Considérons actuellement la sphère céleste indépendamment de

Fig. 15.



son mouvement de rotation journalière qui en amène successivement les diverses parties au-dessus de notre horizon. Pour en faire

la description, c'est-à-dire pour déterminer les positions relatives des étoiles à la surface de cette sphère, les anciens avaient imaginé de distinguer les groupes qu'elles forment çà et là et d'y superposer des figures d'hommes ou d'animaux : ce sont les constellations.

Ainsi le groupe de sept étoiles assez brillantes (*fig.* 15) formant, à l'intérieur du cercle de perpétuelle apparition, un trapèze suivi d'une longue queue de trois étoiles a pris le nom de la *Grande Ourse*. La constellation de la Petite Ourse a même figure, mais une autre position (¹). L'étoile qui se trouve à l'extrémité de la queue est la Po-

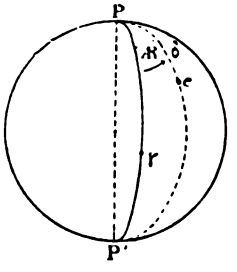
Fig. 16.

laire et désigne à peu près la position du pôle visible. Orion est un grand rectangle (*fig.* 16) portant à l'intérieur trois belles étoiles très voisines qui figurent le baudrier de ce chasseur céleste. Il est suivi de la constellation du Grand Chien, dont l'œil est Sirius, la plus belle

(¹) Cette région des Ourses célestes s'appelle *région arctique*, du grec ἄρκτος, *Ourse;* de là aussi le nom de *pôle arctique*, donné au pôle céleste qui, pour notre hémisphère, se trouve au-dessus de l'horizon.

étoile du ciel. Les anciens astronomes se reconnaissaient ainsi dans le ciel, grâce à ces configurations dont l'idée remonte à la plus haute antiquité. On s'en sert encore, dans les observations à l'œil nu, pour indiquer la place où l'on a vu quelque phénomène, une comète, une étoile filante, un bolide. Mais, pour l'étude plus scientifique du ciel, on a recours à un système de coordonnées sphériques dont l'axe sera naturellement la ligne des pôles PP'. Chaque étoile e est dé-

Fig. 17.



terminée par sa distance Pe au pôle, ou δ, et par l'angle dièdre γPe, compris entre son méridien Pe et un méridien de convention Pγ. Cet angle dièdre se nomme l'*ascension droite* Æ de l'étoile e. Il se compte à partir du méridien du point γ dans le sens direct, de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h.

Ainsi les coordonnées uranographiques d'une étoile quelconque e seront

Pe ou distance polaire de l'étoile $= \delta$,

γPe ou ascension droite de l'étoile $=$ Æ.

Coordonnées géographiques.

De même, pour décrire le globe terrestre, nous rapporterons les points de sa surface, considérée comme sphérique, à l'axe de rotation de la Terre pp', lequel se confond avec l'axe de rotation du ciel PP'. Un point A de ce globe sera donné par

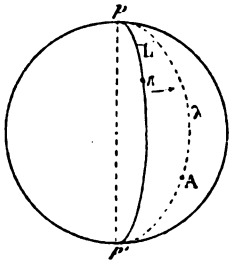
pA, distance polaire ou colatitude λ,

πpA, angle dièdre ou longitude L.

Cet angle dièdre sera compté, comme le précédent, dans le sens

direct, de 0° à 360° ou de 0^h à 24^h, à partir d'un méridien terrestre pris comme point de départ. En France, on compte les longitudes géographiques à partir du méridien de Paris; en Angleterre, à

Fig. 18.



partir du méridien de Greenwich. Les colatitudes λ se comptent, à partir du pôle nord p, de 0° à 180°.

On voit qu'il y a un axe commun à ces trois systèmes. Il en résulte entre eux des relations fondamentales que nous allons exposer; elles conduisent à l'une des plus grandes applications que l'on ait jamais faites des sciences, à savoir l'art de déterminer dans le ciel la position qu'un observateur occupe sur le globe terrestre.

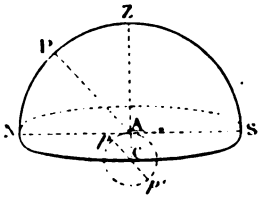
Relations mutuelles de ces trois systèmes de coordonnées sphériques.

Reprenons les coordonnées locales des étoiles. Le plan fondamental de ce système, c'est-à-dire le méridien du lieu, passe par l'axe AP et par la verticale AZ. L'angle ZAP peut être mesuré soit avec l'équatorial que nous avons décrit sommairement, soit avec d'autres instruments dont il sera question plus loin. Cet angle est la distance zénithale du pôle. Évidemment il varie quand l'observateur change de position sur le globe, en marchant dans le sens d'un méridien terrestre. L'aspect du ciel change alors pour lui parce que l'horizon, perpendiculaire à AZ, s'incline de plus en plus, ou de moins en moins sur l'axe de rotation du ciel. Sans avoir besoin de faire ici une figure, on verra bien que, si l'angle ZAP était nul, l'observateur se trouverait posté au pôle même; toutes les étoiles décriraient, dans leur mouvement diurne, des cercles parallèles à l'horizon; il n'y aurait plus d'astres qui se lèvent ou se couchent

Si, au contraire, l'angle ZAP était de 90°, l'observateur se trouverait sur l'équateur terrestre, à égale distance de l'un ou l'autre pôle; l'horizon passerait par la ligne des pôles; il n'y aurait plus d'étoiles circumpolaires toujours visibles ni d'étoiles constamment invisibles; tous les astres resteraient un demi-jour au-dessus de l'horizon et un demi-jour au-dessous. Ainsi il y a des relations intimes entre l'aspect du ciel, ou les coordonnées locales des étoiles, et la situation géographique de l'observateur.

Première relation. — Elle consiste en ce que ZAP (*fig.* 19),

Fig. 19.



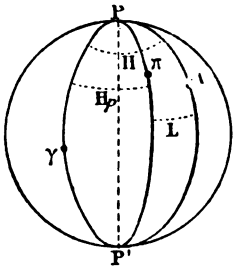
ou distance zénithale du pôle céleste en un lieu quelconque, est égale à la colatitude λ de ce lieu, c'est-à-dire à sa distance sphérique pA au pôle terrestre p.

En effet l'arc pA, sur la sphère terrestre, répond à l'angle pCA compris entre l'axe de rotation pp' et le rayon CA qui aboutit à l'observateur. Construisons autour de lui l'horizon, la sphère céleste, le pôle P et le zénith Z. Pour ce dernier, il suffira de prolonger le rayon CA; quant au premier, on mènera par A une parallèle AP à CP, car les dimensions de ce globe terrestre, que nous avons amplifiées, sont nulles vis-à-vis de celles de la sphère céleste. En d'autres termes, l'axe de rotation de la sphère céleste est déterminé par la seule condition d'être parallèle à celui de la Terre et de passer par l'œil de l'observateur. Par conséquent, $p\mathrm{CA} = \lambda$ est la même chose que PAZ, ou distance zénithale du pôle.

De là cette conséquence capitale. Un observateur placé en un lieu A quelconque du globe terrestre peut, sans se déplacer, déterminer l'arc pA qui exprime sa distance au pôle nord de la Terre. Pour cela il lui suffit de mesurer dans le ciel la distance angulaire du pôle au zénith. L'équatorial dont nous avons parlé plus haut lui donnerait cette mesure, car la verticale s'obtient toujours à l'aide du fil à plomb.

Deuxième relation. — Elle consiste en ce que la longitude $\pi p A$ du point A, comptée à partir du méridien $p\pi$ de Paris, est égale à l'heure du lieu à un certain instant quelconque, moins l'heure de Paris au même instant. Pour le prouver il suffit d'une figure montrant, au même instant, l'angle horaire du point γ en A et en π. Puisque les dimensions de la Terre sont évanouissantes par rap-

Fig. 20.



port à celles de la sphère céleste, projetons à cet instant les lieux A et π sur cette sphère, et notons en même temps la position actuelle du point γ. L'heure sidérale du lieu A est $H = \gamma PA$, celle de Paris $H_\pi = \gamma P\pi$. La longitude du lieu A par rapport à Paris est πPA. Or la figure montre que

$$\pi PA = \gamma PA - \gamma P\pi;$$

donc

$$L = H - H_\pi.$$

Ainsi un observateur, en un lieu A quelconque sur le globe terrestre, peut, sans se déplacer, déterminer l'angle de son méridien avec celui de Paris, c'est-à-dire sa seconde coordonnée géographique. Pour cela il lui suffit de connaître, à un moment quelconque, l'heure du lieu et celle qu'on noterait au même instant à Paris.

Il est évident que tous les lieux situés sur un même parallèle du globe terrestre ont même colatitude, et que les lieux situés sur un même méridien ont même heure et même longitude.

Voilà comment il se fait que la Géographie, c'est-à-dire la connaissance du globe terrestre, est une dépendance immédiate de l'Astronomie; c'est ainsi que les navigateurs déterminent chaque

jour leur position au milieu des mers par de simples observations célestes.

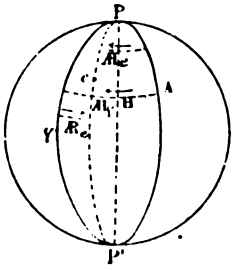
Troisième relation. — Ce n'est pas la moins importante. Elle consiste en ce que l'heure sidérale d'un lieu A est égale non seulement, comme nous l'avons vu, à l'angle horaire Æ_γ du point γ, mais aussi à l'angle horaire Æ_e d'une étoile quelconque e augmenté de son ascension droite Æ_e, en sorte qu'on a

$$H = \text{Æ}_\gamma = \text{Æ}_e + \text{Æ}_e,$$

e désignant une étoile quelconque.

En effet, traçons sur la sphère céleste le méridien PA du lieu A,

Fig. 21.



et marquons sur cette sphère les positions occupées par le point γ et l'étoile e à l'heure H du lieu A. Nous aurons

$$APe = APe + \gamma Pe$$

ou bien

$$H = \text{Æ}_e + \text{Æ}_e.$$

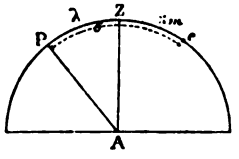
Notez que cette relation suppose que les Æ sont comptés dans le sens direct, vers la droite, ainsi que nous en sommes convenus, tandis que les Æ le sont dans le sens rétrograde, c'est-à-dire vers la gauche de la figure.

Les astronomes s'attachent à déterminer avec la plus grande exactitude les coordonnées uranographiques Æ et δ des principales étoiles. Il est donc facile à tout observateur de choisir parmi elles celle qu'il voudra substituer au point γ pour obtenir l'heure.

De même, un observateur n'a pas à se mettre en peine de déterminer le pôle céleste P pour obtenir $ZP = \lambda$, c'est-à-dire sa colati-

tude. Il lui suffira de mesurer, dans le méridien de sa station, la distance Ze d'une étoile quelconque au zénith.

Fig. 23.



La figure ci-jointe montre que

$$PZ = Pe - Ze,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \delta - z_m,$$

en désignant par z_m la distance zénithale de l'étoile observée dans le méridien du lieu et par δ la distance polaire de cette étoile fournie par les astronomes.

On remarquera qu'au moment où l'étoile e passe au méridien son angle horaire est nul; la relation

$$H = Æ_e + Æ_e$$

se réduit alors à

$$H = Æ_e.$$

Par conséquent, l'ascension droite Æ d'une étoile n'est autre chose que l'heure marquée par une pendule sidérale bien réglée quand ladite étoile passe au méridien du lieu.

Enfin, pour déterminer le pôle indépendamment des coordonnées uranographiques des étoiles, il suffit de remarquer que toute étoile circumpolaire passe deux fois en vingt-quatre heures au méridien d'un lieu quelconque A, une première fois en e, au-dessus du pôle, et une seconde fois en e', au-dessous.

Comme $Pe = Pe' = \delta$, on aura

$$Ze' - Ze = 2Pe = 2\delta,$$
$$Ze' + Ze = 2ZP = 2\lambda.$$

La seconde relation montre qu'on a la distance du pôle au zénith du lieu par la demi-somme des distances zénithales d'une même étoile observée, dans le méridien, à son passage supérieur et à son

passage inférieur. Quant au zénith, il est toujours obtenu, à volonté et avec précision, soit par le fil à plomb, soit par le niveau à bulle d'air.

En récapitulant ces relations si simples, conséquences immédiates de la stabilité de l'axe de la sphère céleste et de l'uniformité de sa rotation, on voit que l'astronome parviendra aisément à déterminer les coordonnées uranographiques des astres, et que le voyageur ou le marin, en possession de ces premiers résultats astronomiques, saura déterminer les coordonnées géographiques de tous les lieux de la Terre.

Par la première, on a la colatitude du lieu en mesurant la distance zénithale du pôle.

Par la deuxième, on a l'heure sidérale du lieu, à un instant donné, en mesurant, à cet instant, l'angle horaire d'une étoile connue.

Par la troisième, on a la longitude en comparant l'heure du lieu, à un instant donné, à celle que l'on compte à Paris, au même instant.

Toute l'Astronomie sphérique est là. Il ne nous reste plus qu'à exposer en détail les moyens d'exécution applicables en tel ou tel cas, et les procédés que possède la Science pour donner aux résultats la plus grande exactitude possible.

Usage des globes céleste ou terrestre.

Dans une foule de questions d'Uranographie ou de Géographie où l'on peut se contenter d'à peu près, on se sert souvent de globes célestes ou terrestres, c'est-à-dire de sphères sur lesquelles on a figuré les étoiles ou les points principaux du globe terrestre. Ces globes tournent autour d'un axe dont les deux bouts sont engagés dans un limbe en bois ou en cuivre qui représente un méridien. Ce limbe est porté lui-même verticalement par un second limbe horizontal figurant l'horizon. En faisant glisser le premier dans les rainures du second, on donne à l'axe de la sphère l'inclinaison voulue pour représenter la position du pôle en un lieu donné. Cette inclinaison est le complément de la colatitude du lieu. Si l'on veut avoir la position des étoiles sur l'horizon du lieu à une heure donnée, par

exemple au moment où $H = 1^h$, on amènera sous le limbe vertical le méridien céleste qui coupe l'équateur à la division 1^h. Alors les étoiles qui ont 1^h d'ascension droite se trouveront sous ce méridien; celles qui se lèvent ou se couchent à 1^h, pour ce lieu-là, se trouveront dans le plan du limbe horizontal. Avec un pareil globe, qu'on identifie ainsi avec le ciel, il sera aisé de retrouver dans le ciel les constellations, les principales étoiles, et de se familiariser avec l'Astromonie qu'on peut faire à l'œil nu, sans instruments.

Par une disposition analogue le globe terrestre permettra de répondre à diverses questions de Géographie. Veut-on, par exemple, savoir en quels lieux de la Terre le Soleil se lève, en un jour donné, quand il est midi à Paris? On commencera par amener l'axe du globe sous l'inclinaison voulue pour que le Soleil se trouve au zénith du cercle horizontal. Cette inclinaison est le complément de la distance polaire du Soleil. Puis on fera tourner le globe jusqu'à ce que Paris vienne se placer sous le méridien vertical. Enfin on cherchera les points du globe marqués alors par le limbe horizontal. Puisque la Terre tourne de droite à gauche devant le Soleil, les points pour lesquels cet astre se lève se trouveront à la partie du limbe située à droite, c'est-à-dire dans l'ouest. Enfin, veut-on savoir quelle heure il est à New-York quand il est midi à Paris? Aucune manœuvre n'est nécessaire; il suffira de lire sur le globe la division de l'équateur qui répond au méridien de New-York. On trouvera, si la division est tracée en heures d'après nos conventions, $18^h 55^m$ en temps astronomique ou $6^h 55^m$ du matin en langage civil. Une dépêche câblée de New-York à $6^h 55^m$ du matin arrive presque instantanément à Paris, mais à Paris, il est midi.

Nous donnons ici un Tableau des coordonnées uranographiques des plus belles étoiles et un autre Tableau des coordonnées géographiques des principaux lieux du globe terrestre.

Coordonnées uranographiques des étoiles principales (pour 1881).

Noms.	Æ.	δ.	Grandeur.
	h m s	° ′ ″	
α Andromède	0. 2.14,22	61.33.59,8	2
α Petite Ourse (Polaire)	1.15. 7,65	1.19.31,8	2
α Éridan (Achernar)	1.33.16,61	147.50.28,9	1
α Bélier	2. 0.27,96	67. 6. 3,3	2
β Persée (Algol)	3. 0.25,70	49.30.14,2	2-3
α Taureau (Aldébaran)	4.29. 5,57	73.43.52,6	1
α Cocher (la Chèvre)	5. 7.53,96	44. 7.29,7	1
β Orion (Rigel)	5. 8.49,14	98.20.25,5	1
α Argo (Canopus)	6.21.18,70	142.37.52,4	1
α Grand Chien (Sirius)	6.39.54,16	106.33.14,9	1
α Petit Chien (Procyon)	7.33. 4,33	84.28.17,0	1
α Hydre	9.21.44,37	108. 8.36,8	2
α Lion (Régulus)	10. 2. 1,98	77.27. 6,5	1-2
α′ Croix du Sud	12.19.58,66	152.26.18,1	1 double
α Vierge (l'Épi)	13.18.35,46	100.32.23,2	1
α Bouvier (Arcturus)	14.10.13,98	70.11.50,5	1
α_2 Balance	14.44.17,75	105.32.46,2	2-3 double
α Couronne (la Perle)	15.29.38,96	62.53. 2,0	2
α Scorpion (Antarès)	16.22. 6,71	116. 9.59,4	1-2
α Hercule	17. 9.13,25	75.28.22,1	3-4
α Lyre (Véga)	18.32.54,49	51.19.34,5	1
α Aigle	19.44.58,58	81.26.41,2	1-2
α Paon	20.16.13,90	147. 6.50,4	2
α Cygne (Deneb)	20.37.22,38	45. 8.39,4	1
α Poisson austral (Fomalhaut)	22.51. 4,30	120.15.10,1	1
α Pégase	22.58.49,95	75.26. 4,7	2

On trouvera deux Tables de ce genre beaucoup plus étendues dans la *Connaissance des Temps*.

Coordonnées géographiques de quelques points de la Terre.

	Longitude.	Colatitude.	Point précis.
	h m s	° ′ ″	
Paris	0. 0. 0	41. 9.49	Observatoire.
Alger	0. 2.57	53.12.40	Phare.
Genève	0.15.15	43.47.56	Saint-Pierre.
Rome	0.40.28	48. 5.54	Saint-Pierre.
Berlin	0.44.14	37.28.47	Ancien observatoire.

Coordonnées géographiques de quelques points de la Terre.

(Suite.)

	Longitude.	Colatitude.	Point précis.
	h m s	° ′ ″	
Vienne	0.56. 9	41.47.27	Saint-Étienne.
Cap de Bonne-Espérance.	1. 4.34	123.56. 3	Observatoire.
Cap Nord	1.34. 0	18.50. 0	
Constantinople	1.46.35	48.59.44	Sainte-Sophie.
Saint-Pétersbourg	1.51.53	30. 3.30	Observatoire.
Aden	2.51.20	77.13.45	Ile Strah.
Bombay	4.41.56	71. 3.53	Église.
Calcutta	5.44. 0	67.26.49	Fort William.
Saïgon	6.57.24	79.13.20	Observatoire.
Pékin	7.36.34	50. 5.47	Observatoire impérial.
Sydney	9.55.33	123.51.41	Observatoire.
Tahiti	13.52.42	107.29.45	Pointe Vénus.
Mexico	17. 4.18	70.34.15	Saint-Augustin.
New-York	18.54.39	49.17.17	City-Hall.
Cap Horn	19.21.42	145.58.40	Sommet.
Cayenne	20.21.21	85. 3.32	Le fort.
Rio-Janeiro	20.58.55	112.54.15	Observatoire impérial.
Saint-Louis	22.44.35	73.59.12	Phare.
Madrid	23.35.56	49.35.30	Observatoire.
Londres	23.50.16	38.29.11	Saint-Paul.

Coordonnées zénithales.

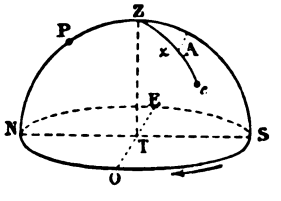
Dans tout ce qui précède, nous avons supposé, pour fixer les idées, qu'on se servait d'une lunette montée équatorialement pour déterminer les coordonnées des étoiles, la colatitude d'un lieu, l'heure sidérale, etc. Il est bien vrai que cet instrument est employé par les astronomes, mais dans un tout autre but. Il sert à retrouver aisément un astre dans le ciel et à le suivre dans son mouvement diurne. Quand on connaît la distance polaire δ de l'astre cherché, on a recours au limbe gradué, fixé à l'axe propre de la lunette, pour donner à celle-ci l'inclinaison δ sur l'axe principal qui reste parallèle à l'axe du monde. Alors, en faisant tourner l'instrument entier autour de celui-ci, l'axe optique de la lunette parcourra sur le ciel le parallèle de l'astre cherché, et l'on aura bien

vite fait de trouver celui-ci. Lorsqu'on emploie de forts grossissements, le champ de la vision est très restreint; l'astre l'a bientôt traversé, en vertu du mouvement diurne; mais on le suit aisément en faisant tourner, à la main, l'instrument autour de l'axe principal. On adapte même à celui-ci un mouvement d'horlogerie pour lui imprimer une vitesse de rotation exactement égale à celle du ciel, et alors la lunette suit l'astre dans son mouvement et reste ainsi toujours pointée sur lui.

Mais, quand il s'agit de mesures précises, un pareil instrument ne vaut rien. La première condition pour mesurer des coordonnées célestes, c'est de pouvoir retrouver et vérifier à chaque instant la direction de l'axe auquel ces coordonnées se rapportent. Or ce n'est pas le cas de l'équatorial. Il faut beaucoup de temps pour le régler sur la direction du pôle, et encore n'y parvient-on qu'à peu près. Une fois réglé, je suppose, rien ne garantit qu'il conservera cette direction. Le moindre dérangement introduirait des erreurs intolérables dans la mesure des coordonnées célestes. La seule direction qu'on puisse toujours et à tout instant retrouver avec une précision illimitée, c'est celle de la verticale. Il faut donc adopter, pour les mesures, un système de coordonnées sphériques ayant cette ligne-là pour axe, et un instrument dont l'axe principal soit vertical. Ce système est celui des coordonnées zénithales; l'instrument correspondant est le théodolite.

Soient

Fig. 23.



Z le zénith de l'observateur T;
P le pôle;
SZPN le méridien;
NS la méridienne;
OE une droite menée par T perpendiculairement à la méridienne.

Les quatre points cardinaux seront S, O, N, E. Un point quel-

conque e de la sphère aura pour coordonnées

$$\text{la distance zénithale } Ze = z,$$
$$\text{l'azimut } SZe = A.$$

Les z se compteront à partir du zénith de 0° à 180° (il suffirait de dire de 0° à 90°, puisque au-dessous de l'horizon on ne voit plus rien). Les A se compteront de 0° à 360°, à partir de la partie sud ZS du méridien, dans le sens SONE. Ces conventions comptent pour toute la Terre, aussi bien pour l'hémisphère sud que pour l'hémisphère nord.

Le même système nous servira, en Géodésie, pour rapporter à une station T les divers points du globe terrestre situés sur l'horizon de ce point. Les azimuts seront comptés encore à partir du point cardinal sud, dans le sens où marchent les aiguilles d'une montre posée à plat, c'est-à-dire de gauche à droite : c'est le sens rétrograde.

Mais ces coordonnées zénithales n'ont d'autre mérite que l'extrême précision avec laquelle elles peuvent être obtenues. Elles ne se rapportent en rien au mouvement diurne de la sphère céleste. Pour utiliser les relations que nous venons de formuler, il faut opérer par le calcul une transformation et passer, des coordonnées zénithales d'un point, aux coordonnées du même point par rapport au pôle. Nous allons traiter cette question d'une manière générale avant de décrire le nouvel instrument de mesure, c'est-à-dire le théodolite.

CHAPITRE II.

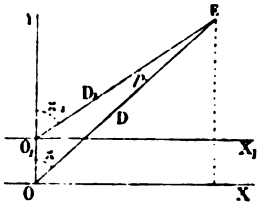
TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

Transformation par déplacement de l'origine.

Soit E un point rapporté à l'axe OY et dont les coordonnées soient

$$z = \mathrm{YOE}, \quad \mathrm{D} = \mathrm{OE}.$$

Fig. 24.



Si l'origine est transportée en O_1 sur l'axe lui-même (c'est le cas usuel), les nouvelles coordonnées seront

$$z_1 = \mathrm{YO_1E}, \quad \mathrm{D_1} = \mathrm{O_1E}.$$

Il s'agit d'obtenir les relations qui lient l'une à l'autre ces diverses coordonnées. Prenons pour intermédiaire un système de coordonnées rectilignes rapportées aux axes OY, OX; celles du point B seront

$$y = \mathrm{D}\cos z, \quad x = \mathrm{D}\sin z,$$

et, si l'origine vient en O_1, on aura

$$y_1 = \mathrm{D_1}\cos z_1, \quad x_1 = \mathrm{D_1}\sin z_1.$$

Pour passer des unes aux autres, on a, en posant $\mathrm{OO_1} = r$, les

relations

$$x_1 = x,$$
$$y_1 = y - r.$$

Par substitution, il vient

$$D_1 \sin z_1 = D \sin z,$$
$$D_1 \cos z_1 = D \cos z - r.$$

Les astronomes n'ayant que des déplacements d'origine OO_1 ou r extrêmement petits par rapport aux distances des astres D et D_1, ils préfèrent calculer la différence

$$(1) \qquad z_1 - z = p.$$

Pour cela retranchons la deuxième équation de la première, après les avoir multipliées respectivement par $\cos z$ et $\sin z$:

$$(2) \qquad D_1 \sin p = r \sin z.$$

Ajoutons-les, après les avoir multipliées par $\sin z$ et $\cos z$:

$$(3) \qquad D_1 \cos p = D - r \cos z.$$

On en tire

$$\operatorname{tang} p = \frac{\frac{r}{D} \sin z}{1 - \frac{r}{D} \cos z}.$$

Les équations (1), (2), (3) contiennent toute la Trigonométrie rectiligne (équations du triangle OO_1B) si l'on y remplace z_1 par $BOO_1 = 180^\circ - z_1$. Par exemple, en élevant au carré (2) et (3) et en les ajoutant, on a

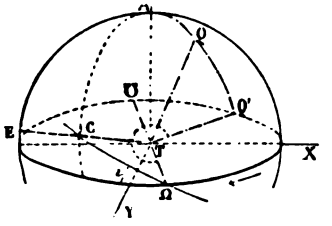
$$D_1^2 = D^2 + r^2 - 2 D r \cos z.$$

Coordonnées sphériques. Manière de représenter une direction ou un plan.

Soient T le centre de la sphère, TA l'axe des coordonnées, XY un grand cercle, un équateur, dont le plan est perpendiculaire à TA, AX le méridien à partir duquel on compte les angles dièdres autour

de l'axe TA, de gauche à droite pour un observateur placé dans l'axe, les pieds sur le plan de l'équateur. Une direction quelconque TCE sera représentée par le point C où la sphère est percée par la droite TE. Faisons passer un méridien AC par ce point; ses coor-

Fig. 25.



données seront : 1° l'angle dièdre XAC = A ; 2° l'arc AC = b, qui mesure l'angle de TE avec TA.

Les angles dièdres A peuvent se compter de 0° à 360° en deux sens opposés autour de l'axe TA, soit de gauche à droite pour un observateur placé le long de l'axe, les pieds sur l'équateur du système, ou bien de droite à gauche. Nous adopterons dans la figure le premier sens. La coordonnée b se compte à partir du point A, de 0° à 180° seulement.

Un plan passant par le centre T coupe la sphère suivant un grand cercle qui rencontre l'équateur sous une inclinaison i, en deux points opposés Ω et ℧. Ces deux points portent les noms de *nœud ascendant* et de *nœud descendant*. Les astronomes ne considèrent que le premier, dont voici la définition : c'est le point où un mobile parcourant ce grand cercle de gauche à droite, sens adopté ici pour le moment, rencontrerait l'équateur en montant de la région inférieure à la région supérieure, c'est-à-dire à celle où se trouve l'axe TA. Pour fixer ce point, il suffit évidemment d'en donner la coordonnée dièdre XAΩ = N qui peut varier de 0 à 360°. Ainsi les deux éléments qui servent à fixer la position d'un plan passant par T sont i et N, i variant de 0 à 90°.

Comme nous aurons souvent besoin de rapporter une direction ou un plan à des coordonnées rectangulaires, nous prendrons pour axe des z la ligne TA, les z positifs étant comptés, comme TA, au-dessus du plan fondamental ; pour axe des X la ligne TX, trace du plan méridien pris pour origine des angles dièdres ; pour axe des

Y une droite dirigée dans le plan fondamental à 90° de TX, dans le sens où l'on compte les A.

Si l'on projette le rayon $TC = r$ sur l'axe des z, on aura $z = r \cos b$. Si on le projette sur le plan des XY, on aura $r \sin b$. Cette dernière droite faisant l'angle A avec TX, sa projection sur l'axe des x sera $r \sin b \cos A$ et sa projection sur celui des y sera $r \sin b \sin A$. On aura donc

$$z = r \cos b,$$
$$x = r \sin b \cos A,$$
$$y = r \sin b \sin A,$$

expressions où l'on peut effacer le facteur r en le prenant pour unité.

Quant au plan, son équation sera

$$mz + nx + py = 0,$$

$\frac{m}{c}, \frac{n}{c}, \frac{p}{c}$ étant les cosinus des angles α, β, γ que la normale TQ à ce plan (sa partie située au-dessus du plan des XY) fait avec les axes, en posant

$$m^2 + n^2 + p^2 = c^2.$$

Pour trouver les relations qui doivent exister entre i et N d'une part et ces coefficients de l'autre, projetons TQ sur le plan XY en TQ'. La coordonnée dièdre du point Q aura pour mesure l'arc $X\Omega Q'$, compté dans le sens convenu. Elle est évidemment égale à $X\Omega + 270°$ ou à $N + 270°$. D'après cela, les coordonnées rectilignes du point Q pourront s'exprimer de deux manières :

$$r \cos \alpha, \quad r \cos \beta, \quad r \cos \gamma$$

ou

$$r \cos i, \quad r \sin i \cos(N + 270°), \quad r \sin i \sin(N + 270°).$$

On aura donc les relations

$$\frac{m}{c} = \cos i, \quad \frac{n}{c} = \sin i \sin N, \quad \frac{p}{c} = -\sin i \cos N.$$

Condition pour que trois points de la sphère, donnés par leurs coordonnées angulaires, soient sur un arc de grand cercle.

Autrement dit, il faut que les trois points C, C', C'' soient dans un plan passant par le centre T. Les neuf coordonnées rectilignes

de ces points devront donc satisfaire aux trois relations

$$z + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}y = 0,$$
$$z' + \frac{n}{m}x' + \frac{p}{m}y' = 0,$$
$$z'' + \frac{n}{m}x'' + \frac{p}{m}y'' = 0.$$

La condition cherchée résultera de l'élimination des deux constantes $\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{m}$ entre ces trois équations. Faisons la somme de ces trois équations, après avoir multiplié la deuxième par λ et la troisième par μ. Les termes en $\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{m}$ disparaîtront si nous posons

$$x + \lambda x' + \mu x'' = 0,$$
$$y + \lambda y' + \mu y'' = 0.$$

Les valeurs correspondantes de λ et de μ ont pour expressions

$$\lambda = -\frac{xy'' - yx''}{y'x'' - x'y''}, \quad \mu = \frac{xy' - yx'}{y'x'' - x'y''}.$$

La condition cherchée sera donc, en chassant le dénominateur dans la somme susdite,

$$(y'x'' - x'y'')z - (xy'' - yx'')z' + (xy' - yx')z'' = 0.$$

Remplaçons ces neuf coordonnées par leurs expressions angulaires, divisons tous les termes par le produit $\sin b \sin b' \sin b''$, et remarquons qu'alors

$$\begin{array}{lll} y'x'' - x'y'' & \text{se réduit à} & \sin(A'' - A'), \\ xy'' - yx'' & \quad\text{»} & \sin(A'' - A), \\ xy' - yx' & \quad\text{»} & \sin(A' - A); \end{array}$$

nous aurons finalement la condition

$$\sin(A'' - A')\cot b - \sin(A'' - A)\cot b' + \sin(A' - A)\cot b'' = 0.$$

Pour déterminer ce plan, il faudra tirer $\frac{n}{m}$ et $\frac{p}{m}$ des deux pre-

mières équations, ce qui donne

$$\frac{n}{m} = -\frac{zy' - yz'}{xy' - yx'} = -\frac{\cot b \sin A' - \cot b' \sin A}{\sin(A' - A)} = \tang i \sin N,$$

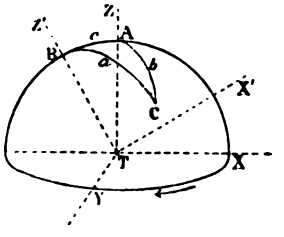
$$\frac{p}{m} = \frac{zx' - xz'}{xy' - yx'} = \frac{\cot b \cos A' - \cos b' \cot A}{\sin A' - A} = -\tang i \cos N.$$

d'où l'on tire i et N sans ambiguïté, car, d'après nos conventions, il suffit de prendre $i < 90°$; $\tang i$ est alors positif, et le quadrant où il faut prendre N est indiqué par les signes de son sinus et de son cosinus.

Changement de direction de l'axe des coordonnées sphériques.

Nous supposerons que les angles dièdres des deux systèmes soient comptés dans le même sens. Soient donc TA l'axe primitif, A et b les coordonnées d'un point C de la sphère.

Fig. 26.



Inclinons vers la gauche l'axe de ce système d'un angle c, en TB, dans le plan même que nous avons choisi pour origine des angles dièdres A, et prenons ce même plan pour origine des angles dièdres B comptés autour du nouvel axe. Les coordonnées nouvelles de C seront XBC = B, BC = a.

Pour opérer cette transformation, prenons comme intermédiaires les coordonnées rectilignes du point C rapportées aux axes TZ, TX, TY; nous aurons

$$z = \cos b, \quad x = \sin b \cos A, \quad y = \sin b \sin A.$$

Faisons tourner les axes TX et TZ de l'angle ATB = c, en appelant z_1, x_1, y_1 les nouvelles coordonnées.

Elles auront pour expressions

$$z_1 = \cos a, \quad x_1 = \sin a \cos B, \quad y_1 = \sin a \sin B.$$

Les formules de transformation pour les coordonnées linéaires étant

$$\begin{aligned} z_1 &= z \cos c - x \sin c, \\ x_1 &= z \sin c + x \cos c, \\ y_1 &= y, \end{aligned}$$

celles des coordonnées angulaires seront

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos c \cos b - \sin c \sin b \cos A, \\ \sin a \cos B &= \sin c \cos b + \cos c \sin b \cos A, \\ \sin a \sin B &= \qquad\qquad\qquad \sin b \sin A. \end{aligned}$$

Ces formules sont absolument générales. Tous les angles peuvent être comptés de 0° à 360°; mais, comme nous n'avons besoin de compter les a, b, c que de 0° à 180°, il n'y aura jamais ambiguïté dans leur interprétation. En effet, pour calculer a et B au moyen de b, A et c, les deux dernières donnent les signes de $\cos B$ et $\sin B$, puisque $\sin a$ sera toujours positif.

Ces trois équations ne sont pas entièrement distinctes; si on les ajoute après les avoir élevées au carré, on aboutit à l'identité $1 = 1$; mais leur ensemble a l'avantage de faire disparaître toute ambiguïté. Elles s'appliquent au cas où l'on passe du pôle A au pôle B. Pour la transformation inverse, il suffirait de changer a, B en b, A et c en $-c$.

Application de ces formules aux coordonnées célestes.

Introduisons dans ces formules les notations relatives à nos systèmes de coordonnées célestes. Si, après avoir mesuré la distance zénithale A et l'azimut z d'une étoile, en un lieu de colatitude λ, on veut en déduire pour le même instant les coordonnées horaires δ et H, il suffira de remplacer dans les formules précédentes les lettres b, A, c, a, B par z, A, λ, δ, H, ce qui donne

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \cos \lambda \cos z - \sin \lambda \sin z \cos A, \\ \sin \delta \cos H &= \sin \lambda \cos z + \cos \lambda \sin z \cos A, \\ \sin \delta \sin H &= \qquad\qquad\qquad \sin z \sin A. \end{aligned}$$

Si au contraire on avait δ et H, et qu'on en voulût conclure les coordonnées zénithales z et A, on opérerait une simple permutation de lettres en remplaçant λ par $-\lambda$. De là

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos H, \\ \sin z \cos A &= -\sin\lambda \cos\delta + \cos\lambda \sin\delta \cos H, \\ \sin z \sin A &= \sin\delta \sin H. \end{aligned}$$

Il serait bien facile de rendre ces formules calculables, comme l'on dit, par logarithmes (¹). Les astronomes ne s'en préoccupent guère. L'essentiel pour eux est d'obtenir les résultats avec toute la précision que les Tables comportent. Pour cela il importe de déterminer les angles par leurs tangentes qui, dans la région la moins favorable des Tables, celle où la différence des logarithmes des tangentes est la plus petite, c'est-à-dire vers 45°, donnent une exactitude double de celle des sinus ou cosinus. Or, en divisant la troisième équation du dernier groupe, par exemple, par la deuxième, on a tang A; puis, connaissant A sans ambiguïté, puisque les signes de sin A et de cos A sont donnés par les deux dernières, on divise la deuxième ou la troisième par la première et on a z par sa tangente.

Il est facile de voir que, si l'angle horaire H croît proportionnellement au temps, il n'en est pas de même de l'azimut A. Il n'y a qu'une chose de commune à ces deux angles dièdres : c'est qu'ils se trouvent du même côté du méridien, à la fois plus petits ou à la fois plus grands que 180°. Ces formules revenant sans cesse dans ce Cours, elles se graveront d'elles-mêmes dans la mémoire.

C'est ici le lieu d'exposer la Trigonométrie sphérique qui est contenue tout entière dans ces formules.

(¹) En posant $\cos\delta = m\cos\varphi$, $\sin\delta\cos H = m\sin\varphi$, on aura

$$\begin{aligned} \cos z &= m\cos(\varphi - \lambda), \\ \sin z \cos A &= m\sin(\varphi - \lambda), \\ \sin z \sin A &= \sin\delta \sin H. \end{aligned}$$

Rien n'empêche de convenir que m sera positif; dès lors φ est obtenu sans ambiguïté.

Trigonométrie sphérique.

Les premières équations se rapporteront au triangle sphérique ABC, à la seule condition d'y remplacer A par son supplément $180° - A$ et de limiter les angles dièdres A, B à 180°. On a ainsi, pour le triangle quelconque ABC,

$$(1) \qquad \cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A,$$
$$(2) \qquad \sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A,$$
$$(3) \qquad \sin a \sin B = \sin b \sin A.$$

En divisant (2) par (3), on aura une nouvelle forme d'équation :

$$(4) \qquad \sin A \cot B = \sin c \cot b - \cos c \cos A.$$

Ces équations s'appliqueront au triangle supplémentaire dont les angles sont les suppléments des côtés du triangle ABC et dont les côtés sont les suppléments des angles dièdres du même triangle. On obtiendra donc de nouvelles relations entre les six éléments a, b, c, A, B, C en remplaçant, dans (1) et (2), a par $180° - A$, etc. et réciproquement. Il vient ainsi

$$(5) \qquad \cos A = -\cos C \cos B + \sin C \sin B \cos a,$$
$$(6) \qquad \sin A \cos b = \sin C \cos B + \cos C \sin B \cos a.$$

La même substitution dans (3) et (4) ne donnerait pas lieu à des formes nouvelles.

Par simple permutation des lettres, on obtiendra trois équations des formes (1), (3), (5) et six des formes (2), (4), (6). Telles sont les relations suffisantes pour résoudre tous les problèmes des triangles sphériques. Remarquons seulement qu'il faut trois données; par suite, les seules relations immédiatement utilisables sont celles qui n'en comprennent que quatre, comme les groupes (1), (3), (5).

Formules calculables par logarithmes.

En partant de l'équation (1), on a

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin b \sin c}.$$

Par une transformation connue [1], on en tire

$$1 - \cos A = -\frac{\cos a + \cos(b-c)}{\sin b \sin c} = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} A,$$

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} A,$$

d'où, en posant $a + b + c = 2s$,

$$(7)\quad \begin{cases} \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin s}{\sin b \sin c}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin s}}. \end{cases}$$

On doit prendre le radical positivement, parce que, A ne pouvant dans un triangle dépasser 180°, sa moitié ne peut dépasser 90°.

De même on déduirait du groupe (5), en posant $A + B + C = 2S$,

$$(8)\quad \begin{cases} \sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\dfrac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}}, \\ \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\dfrac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \sqrt{\dfrac{-\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}. \end{cases}$$

Analogies de Delambre et de Neper.

Écrivons ici les deux premières analogies des sinus (1):

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A,$$
$$\sin a \sin C = \sin c \sin A.$$

---

[1] Nous rappelons ici les formules usuelles :

$$\sin a + \sin b = 2\sin \tfrac{1}{2}(a+b)\cos \tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$\sin a - \sin b = 2\sin \tfrac{1}{2}(a-b)\cos \tfrac{1}{2}(a+b),$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos \tfrac{1}{2}(a+b)\cos \tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin \tfrac{1}{2}(a-b)\sin \tfrac{1}{2}(a+b).$$

Combinons-les par addition et soustraction, en remplaçant les sommes ou les différences de sinus par des produits :

$$(a)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(B-C) \\ \quad = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}(b-c), \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C) \\ \quad = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}(b+c). \end{cases}$$

Ces équations, décomposées en facteurs, donnent immédiatement les équations de Delambre :

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B-C) &= \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(b+c), \\ \cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}(B+C) &= \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b-c), \\ \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}(B-C) &= \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(b-c), \\ \cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B+C) &= \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b+c). \end{aligned}$$

Le produit des deux premières reproduit l'équation (a) ; le produit des deux dernières reproduit l'équation (b). Pour vérifier la légitimité de cette décomposition, il suffira de remplacer dans les dernières équations les sinus et les cosinus des angles $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ par leurs expressions tirées du groupe (7) ; elles se réduisent alors à des identités.

Chacune de ces analogies comprend les six éléments du triangle sphérique ; mais, en les divisant deux à deux, on obtient les analogies de Neper, qui se prêtent parfaitement à la résolution des triangles. Ce sont

$$(9)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cot\frac{1}{2}A, \\[2ex] \operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-C) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cot\frac{1}{2}A, \\[2ex] \operatorname{tang}\frac{1}{2}(b+c) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a, \\[2ex] \operatorname{tang}\frac{1}{2}(b-c) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}a. \end{cases}$$

Triangles rectangles.

Il suffit de faire $A = 90^\circ$ dans les trois formules fondamentales (1), (2), (3); elles deviennent

$$\cos a = \cos c \cos b, \tag{1}$$
$$\sin a \cos B = \sin c \cos b, \tag{2}$$
$$\sin a \sin B = \sin b. \tag{3}$$

d'où, par permutation,

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c, \tag{4}$$
$$\sin a \sin C = \sin c. \tag{5}$$

En divisant (2) et (4) par (1), puis par (5) et (3), puis par (3) et (5), respectivement, on aura

$$\operatorname{tang} a \cos B = \operatorname{tang} c, \tag{6}$$
$$\operatorname{tang} a \cos C = \operatorname{tang} b, \tag{7}$$

puis

$$\frac{\cos B}{\sin C} = \cos b, \tag{8}$$
$$\frac{\cos C}{\sin B} = \cos c, \tag{9}$$

puis

$$\cot B = \sin c \cot b, \tag{10}$$
$$\cot C = \sin b \cot c, \tag{11}$$

dont le produit donne enfin

$$\cot B \cot C = \cos b \cos c = \cos a. \tag{12}$$

A titre de moyen mnémonique, posons

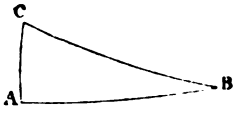
$$b = 90^\circ - b', \quad c = 90^\circ - c';$$

les équations utilisables pourront être écrites ainsi:

$$\begin{aligned}
\cos a &= \sin c' \sin b', & \cos a &= \cot B \cot C,\\
\cos b' &= \sin a \sin B, & \cos b' &= \cot c' \cot C,\\
\cos c' &= \sin a \sin C, & \cos c' &= \cot b' \cot B,\\
\cos B &= \sin b' \sin C, & \cos B &= \cot a \cot C,\\
\cos C &= \sin c' \sin B, & \cos C &= \cot a \cot B.
\end{aligned}$$

Si l'on considère l'ordre dans lequel se suivent les cinq quantités b', c', B, a, C, lorsqu'on tourne autour d'un triangle rectangle en sautant l'angle droit A, on voit que le cosinus de l'une d'elles

Fig. 27.



est égal au produit des cotangentes des deux éléments adjacents ou au produit des sinus des deux éléments non adjacents.

Résolution des triangles quelconques.

Étant donnés trois des six éléments d'un triangle, les formules que nous venons d'exposer permettent de calculer les trois autres, de même que la Géométrie permettrait de les construire à l'aide d'une sphère et d'un compas.

On peut donner :

1° Les trois côtés;

2° Les trois angles;

3° Deux côtés et l'angle compris;

4° Deux angles et le côté commun;

5° Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux;

6° Deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Inutile d'ajouter que les données doivent satisfaire avant tout aux conditions d'existence des triangles; en d'autres termes, chaque angle ou chaque côté doit être compris entre 0° et 180°, un côté quelconque doit être plus petit que la somme des deux autres, la somme des trois côtés doit être moindre que 360°, et celle des trois angles doit être comprise entre 180° et 540°.

Les quatre premiers cas ne donnent lieu à aucune discussion. Le triangle peut toujours être construit géométriquement, et il est unique; il en sera de même du calcul. Les deux premiers sont tout résolus par les groupes (1) ou (5), et, si l'on tient à employer des formules dites *calculables par logarithmes*, par les groupes (7) ou (8). Les deux cas suivants se ramènent aux premiers par les formules (1) ou (5). Il est plus simple d'y employer les analogies

de Neper. Si par exemple les données sont b, c, A, on calculera B — C et B + C par les deux premières analogies, puis a par l'une des deux autres.

Les deux derniers cas peuvent conduire à une, à deux solutions ou à une impossibilité. On s'en rend compte aisément par la Géométrie. Si les données sont, par exemple, a, b et B, on construira sur une sphère l'angle dièdre B et sur l'un des côtés on portera le côté a; puis de l'extrémité de ce côté comme centre on décrira, avec un compas d'ouverture b, un arc de petit cercle qui coupera le côté indéfini de l'angle B en deux points, ou qui le touchera en un seul, ou ne le rencontrera pas. Il y aura même à examiner, dans le cas de la double rencontre, si les deux solutions sont acceptables. Il nous suffira de faire remarquer que, dans le calcul, on est obligé de se servir d'une analogie des sinus pour obtenir l'angle A.

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B.$$

Si la valeur qu'on en tire pour sin A est plus grande que 1, le problème n'a pas de solution; il n'en a qu'une si cette valeur est égale à l'unité; il en a deux si $\sin A < 1$, puisqu'à chaque sinus répondent deux arcs supplémentaires également admissibles pour un triangle. Il reste à savoir, dans ce dernier cas, si les deux solutions sont acceptables et cadrent avec les données. Or, dans tout triangle, de deux côtés, le plus grand est opposé au plus grand angle; en d'autres termes, B — A doit être de même signe que $b - a$. Si les deux valeurs trouvées pour A satisfont à cette condition, il y a deux solutions; autrement il faudra rejeter celle qui n'y répond pas.

Il n'y a pas lieu d'insister beaucoup sur ces discussions, car les astronomes ont l'habitude de se procurer d'avance, par des moyens que nous aurons l'occasion d'exposer, des valeurs approchées des éléments inconnus. D'ailleurs on ne rencontre pas dans la pratique de triangle impossible, puisque les phénomènes observés sont de toute réalité.

Sur les calculs trigonométriques.

Avant tout il faut se rendre compte du degré de précision des données, afin d'y proportionner la précision des calculs. Si les observations sont faites à la minute ou même au dixième de minute

près, des logarithmes à cinq décimales suffisent. Si elles prétendent à la précision de la seconde, on emploiera des Tables à six ou même à sept décimales.

Quel que soit ce nombre, le dernier chiffre d'un logarithme pris par interpolation dans la Table sera affecté d'une erreur comprise entre 0 et 1. Entre ces limites, toutes les erreurs sont également probables; au delà elles sont impossibles (sauf le cas, excessivement rare, d'une faute d'impression). Il est essentiel de remarquer que ces erreurs sont indifféremment en plus ou en moins: la probabilité est absolument la même pour les deux cas.

Cela posé, lorsque l'on combine plusieurs logarithmes par voie d'addition ou de soustraction, comme dans tous les calculs dont nous aurons à nous occuper, il y aura une compensation au moins partielle des erreurs dont ils seront affectés, puisque celles-ci sont positives pour les uns, négatives pour les autres. Cette compensation spontanée d'erreurs qui se produisent indifféremment dans un sens ou dans l'autre, et qu'on pourrait appeler *fortuites*, joue un si grand rôle en Astronomie et même dans toutes les sciences d'observation et de mesure, que nous devons nous y arrêter un moment pour en donner une preuve de fait.

Prenons, dans une Table à cinq décimales, les vingt premiers logarithmes et faisons-en la somme. Chacun de ces nombres (il s'agit de logarithmes irrationnels) est affecté d'une erreur comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$ unité du sixième ordre décimal. L'erreur résultante s'obtiendra avec une très grande précision si nous faisons la même somme au moyen d'une Table à sept décimales. On trouve alors que l'erreur, qui pourrait en toute rigueur s'élever à près de 10 unités, n'est que de $-1,66$. Il y a donc eu une large compensation d'erreurs. Si l'on répète cette expérience sur les vingt logarithmes suivants, on trouve que l'erreur est $+2,16$. En opérant ainsi vingt fois de suite, on obtient les résultats suivants:

13	erreurs comprises	entre	0 et 1,
4	»	»	1 et 2,
2	»	»	2 et 3,
1	»	»	3 et 4.

Ainsi, une compensation partielle des erreurs est énormément plus probable que leur accumulation soit dans un sens, soit dans

l'autre. Le Calcul des probabilités, appliqué à cette question, montre qu'il y a

2 432 900 000 000 000 000

à parier contre 1 que la somme de vingt logarithmes pris au hasard ne sera pas en erreur d'une quantité comprise entre 9 et 10 unités du dernier ordre.

Dans le calcul des formules trigonométriques, l'erreur probable du résultat, en tant qu'elle provient des Tables et de l'interpolation, est d'environ 1 unité du dernier ordre décimal.

Il est aisé, d'après cela, de juger du degré de précision qu'on atteindra avec une Table à cinq décimales. Les angles étant obtenus par leurs tangentes, consultons la région la plus défavorable, celle où la différence de deux logarithmes tangentiels consécutifs est la plus petite. Nous trouvons que, vers 45°, cette différence est de 26 pour 1′. L'erreur probable de 1 unité introduira donc dans l'angle conclu une erreur de $\frac{1'}{26}$, c'est-à-dire d'un peu plus de 2″. L'erreur serait cent fois moindre, c'est-à-dire d'un peu plus de 0″,02, si l'on avait recours aux Tables à sept décimales.

Il est très facile d'acquérir l'habitude du calcul, pourvu qu'on observe les prescriptions suivantes, qui tiennent à un ordre d'idées connu sous le nom de *division du travail*. En premier lieu, inscrire avec soin les données numériques et réunir les formules à employer; en second lieu, faire le Tableau des calculs en blanc, de manière à n'avoir plus qu'à y porter les nombres. Par exemple, s'il s'agit d'appliquer la formule

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}},$$

on dressera d'abord le Tableau suivant :

a	$\log\sin(s-b)$
b	$\log\sin(s-c)$
c	$C^{t}\log\sin s$
$2s$	$C^{t}\log\sin(s-a)$
s	$\log\operatorname{tang}^{2}\frac{1}{2}A$
$s-a$	$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}A$
$s-b$	$\frac{1}{2}A$
$s-c$	A

Vérif. somme $= s$

Alors on ouvre la Table de logarithmes, et l'on n'a plus à se préoccuper que de ne pas commettre d'erreurs de transcription. Quant aux additions ou soustractions, il est de règle de n'en jamais passer une sans la vérifier immédiatement. Les parties proportionnelles se calculent sur une petite feuille séparée, afin de ne pas gâter l'aspect des calculs, car, si les calculs sont bien écrits, bien ordonnés, et qu'une faute vienne à s'y glisser, un coup d'œil sur la marche des nombres suffit souvent pour la faire reconnaître.

Les Tables à trois, quatre ou cinq décimales sont si commodes, que les astronomes s'attachent le plus souvent à ramener ces calculs à leur emploi. Pour cela ils se servent du développement des formules en séries, lorsque cela est praticable, c'est-à-dire lorsque celles-ci renferment une ou plusieurs quantités assez petites pour que leur carré ou leur cube, etc., soit négligeable.

Formules différentielles des triangles sphériques.

Ces formules sont d'un continuel usage en Astronomie.

En effet, les mesures des coordonnées des astres ou des éléments de certains triangles sont toujours affectées d'erreurs plus ou moins sensibles; il importe donc d'apprécier l'influence que ces erreurs peuvent avoir sur les éléments conclus, angles ou côtés. Ces erreurs étant toujours très petites, de sorte que leurs puissances supérieures à la première sont parfaitement négligeables, on est autorisé à les traiter comme de simples différentielles du premier ordre. Dès lors, en différentiant les équations du triangle par rapport aux éléments affectés d'erreurs, on obtiendra les relations nécessaires.

Supposons, par exemple, que dans le triangle ABC la mesure du côté c soit affectée d'une erreur $\pm dc$: quelle sera l'influence que cette erreur exercera sur les éléments conclus a, B, C? Il suffira, pour l'apprécier, de différentier les équations fondamentales (1), (2), (3) par rapport à c, a, B, et, comme l'angle C n'y entre pas, on y joindra une équation du groupe (1) :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Par (1) on aura, A et b étant invariables,

$$-\sin a\, da = (-\sin c \cos b + \cos c \sin b \cos A)\, dc,$$

d'où, en tenant compte de (2),

$$da = \cos B\, dc.$$

L'analogie (3) donnera

$$\cos a \sin B\, da + \sin a \cos B\, dB = 0,$$

d'où

$$\sin a\, dB = -\cos a \sin B\, dc.$$

Enfin la relation susdite en $\cos c$ donne

$$-\sin c\, dc = (-\sin a \cos b + \cos a \sin b \cos C)\, da - \sin a \sin b \sin C\, dC$$

ou bien

$$\sin c\, dc = \sin c \cos B\, da + \sin a \sin b \sin C\, dC.$$

En y portant la valeur de da et en comparant avec la troisième analogie des sinus, on aura

$$\sin a\, dC = -\sin B\, dc.$$

Ainsi, une erreur sur le côté mesuré c aura d'autant plus d'influence sur les angles conclus B et C que le côté a sera plus petit. Comme les triangles célestes sont perpétuellement variables, cela nous avertit de ne mesurer les éléments du triangle ACB, dont on a besoin pour en conclure B et C, que lorsque le côté a aura acquis une grandeur suffisante.

On obtient souvent les mêmes résultats par la Géométrie, plus simplement que par le calcul. Soit BD (sans figure) l'erreur infiniment petite commise sur le côté AB, et E la projection du point D sur CB. Le triangle élémentaire BDE, rectangle en E, donne

$$BE = BD \cos B \quad \text{ou} \quad da = \cos B\, dc,$$

puis

$$DE = BD \sin B.$$

Or le triangle rectangle DEC donne, par l'analogie des sinus,

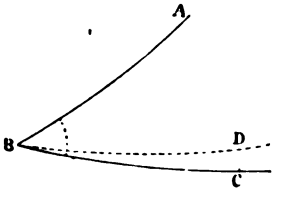
$$\frac{\sin DCE}{\sin DE} = \frac{1}{\sin DC} \quad \text{ou} \quad \sin a\, dC = -\sin B\, dc,$$

en tenant compte du sens attribué à BD sur la figure.

C'est ici le lieu de faire une remarque importante. Quand on

voit figurer dans une formule de ce genre les différentielles des angles dièdres mêlées à celles des côtés, on observe que les premières sont toujours multipliées par le sinus du côté variable de l'angle dièdre. Cela tient à ce que dB et da ne sont pas des quantités de même espèce; da est une portion d'arc de grand cercle; dB, à lui seul, n'exprime rien de semblable. Les variations des coordonnées d'un point doivent représenter les petits déplacements de ce point mesurés sur des arcs de grand cercle. Si le point C, par exemple, a pour coordonnées $BC = z$ et CBA ou B, dz représentera un déplacement du point C dans le sens BC; dB n'exprimerait qu'une variation de l'angle dièdre B qui laisse indéterminé le déplacement du point C dans le sens perpendiculaire à BC. Pour définir celui-ci, il faut écrire $\sin z\, dB$, forme qui exprimera, comme dz, un petit déplacement linéaire CD.

Fig. 28.



Nous n'insisterons pas davantage sur ces relations différentielles, parce que nous aurons sans cesse occasion d'y revenir. Il suffira de les indiquer au fur et à mesure des besoins.

Développement en série des fonctions trigonométriques.

Les astronomes font un continuel usage de ces développements lorsqu'il se présente, dans les formules, des angles ou des arcs assez petits pour qu'on soit en droit d'en négliger les puissances supérieures. Ils réduisent ainsi ces formules à de petits termes pour lesquels des Tables à trois ou quatre décimales suffisent amplement. Le procédé général consiste dans l'application de la série de Maclaurin. Une fonction $y = f(x)$ peut être mise sous la forme

$$y = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \ldots,$$

pourvu que cette fonction et ses dérivées restent continues dans l'intervalle où on les emploie, et que la série soit convergente.

Prenons pour exemple l'équation des triangles rectangles

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B.$$

Si B n'est pas très grand, c différera peu de a, et il y aura avantage à développer $c - a$ en série procédant suivant les puissances ascendantes, non pas de $\cos B$, mais d'une autre fonction de B dont les puissances décroissent très rapidement. Posons

$$\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B} = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B = x, \quad \text{d'où} \quad \cos B = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

En portant cette expression dans celle de $\operatorname{tang}(c - a)$,

$$\operatorname{tang}(c - a) = \frac{\operatorname{tang} c - \operatorname{tang} a}{1 + \operatorname{tang} c \operatorname{tang} a} = \frac{\operatorname{tang} a (1 - \cos B)}{1 + \operatorname{tang}^2 a \cos B},$$

on aura, toutes réductions faites,

$$c - a \doteq \operatorname{arc\,tang} \frac{-x \sin 2a}{1 + x \cos 2a} = f(x).$$

En différentiant $f(x)$ plusieurs fois de suite :

$$f'(x) = \frac{-\sin 2a}{1 + x^2 + 2x \cos 2a}, \quad f''(x) = \frac{2x \sin 2a + \sin 4a}{(1 + x^2 + 2x \cos 2a)^2}, \quad \ldots.$$

Il n'y aura plus qu'à faire $x = 0$ dans $f(x)$ et ses dérivées, ce qui donne

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -\sin 2a, \quad f''(0) = \sin 4a, \quad \ldots,$$

et l'on aura, en mettant pour x sa valeur,

$$c - a = -\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B \sin 2a + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2} B \sin 4a - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^6 \tfrac{1}{2} B \sin 6a + \ldots.$$

Lagrange a donné une autre méthode plus simple et plus élégante pour obtenir ces développements d'une manière purement algébrique. Elle consiste à remplacer les lignes trigonométriques par leurs expressions en exponentielles imaginaires. Dans le cas actuel, en employant l'expression précédente de $\operatorname{tang}(c - a)$ en fonction de x, nous aurons

$$\frac{1}{i} \frac{e^{i(c-a)} - e^{-i(c-a)}}{e^{i(c-a)} + e^{-i(c-a)}} = \frac{1}{i} \frac{-xe^{2ia} + xe^{-2ia}}{2 + xe^{2ia} + xe^{-2ia}}.$$

Combinons les deux termes de chaque fraction par voie d'addition et de soustraction; il viendra

$$\frac{2e^{i(c-a)}}{2e^{-i(c-a)}} = e^{2i(c-a)} = \frac{1 + xe^{-2ia}}{1 + xe^{2ia}}.$$

Prenons les logarithmes népériens des deux membres et remplaçons, par des développements, les logarithmes des deux termes du second :

$$\begin{aligned} 2i(c-a) = {} & xe^{-2ia} - \tfrac{1}{2}x^2e^{-4ia} + \tfrac{1}{3}x^3e^{-6ia} - \ldots, \\ & - xe^{2ia} + \tfrac{1}{2}x^2e^{4ia} - \tfrac{1}{3}x^3e^{6ia} + \ldots. \end{aligned}$$

On divisera par $2i$, on repassera des exponentielles aux sinus et on retombera finalement sur la série précédemment obtenue, série que nous retrouverons plus tard.

Lagrange a donné une formule plus générale pour le développement de certaines fonctions implicites de x, telles que $F(z)$, z étant relié à la variable x par l'équation

$$z = x + \alpha f(z),$$

dans laquelle α est une quantité assez petite pour que la série procédant suivant ses puissances successives ait une convergence marquée. Nous nous bornerons à donner cette formule, dont l'emploi n'exige que des différentiations, et nous l'appliquerons plus tard :

$$\begin{aligned} F(z) = {} & F(x) + \alpha F'(x) f(x) \\ & + \frac{\alpha^2}{1.2} \frac{d[F'(x)(fx)^2]}{dx} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} \frac{d^2[F'(x)(fx)^3]}{dx^2} + \ldots. \end{aligned}$$

Enfin les astronomes ont souvent recours à la simple substitution des séries qui expriment $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$ dans les expressions trigonométriques où figurent de petits angles. Il ne s'agit pas, dans ce cas, d'obtenir des séries complètes qui représenteraient analytiquement les fonctions proposées, mais simplement les termes les plus sensibles de ces séries, de manière à faciliter le calcul numérique. Nous en trouverons des exemples en Géodésie.

Terminons par une remarque essentielle pour la pratique. Dans ces séries et dans bien d'autres formules où l'on rencontre à la fois des arcs et des lignes trigonométriques, il ne faut pas oublier que

les arcs sont censés exprimés en parties du rayon et non en parties de la circonférence, c'est-à-dire en minutes ou en secondes. Si on veut les avoir en secondes, il faut opérer un changement d'unité tout semblable à ce que l'on fait pour écrire en toises une longueur exprimée en mètres. Dans ce dernier cas, on multiplie le nombre par le rapport du mètre à la toise. De même ici, il faudra multiplier la valeur de l'arc tirée de la formule par le rapport du rayon à la seconde, c'est-à-dire par 206265. Par exemple, dans la série

$$c - a = -\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B \sin 2a + \ldots,$$

$c - a$ est exprimé en parties du rayon; dans la formule

$$c - a = 206265'' [-\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B \sin 2a + \ldots],$$

$c - a$ est exprimé en secondes.

CHAPITRE III.

THÉORIE DES INSTRUMENTS DE MESURE ANGULAIRE. PRINCIPAUX ORGANES DE CES INSTRUMENTS.

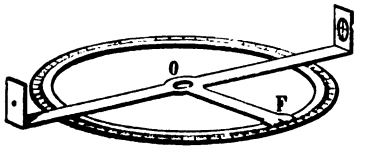
Le théodolite est l'instrument destiné à la mesure des coordonnées zénithales z et A des astres ou des objets terrestres. Ce n'est pas autre chose que l'équatorial dont nous avons déjà parlé à l'occasion des coordonnées polaires δ et H, mais redressé de manière que son axe, au lieu d'être dans la direction inclinée de l'axe du monde, soit placé dans celle de la verticale. La grande supériorité du théodolite consiste en ce qu'on peut, à tout instant, retrouver la direction de son axe à l'aide du niveau ou du fil à plomb, et la corriger avec précision si cet axe venait à s'écarter de la verticale. Avant de décrire le théodolite et les méthodes d'observation qui lui sont applicables, nous examinerons successivement divers organes qu'on rencontre dans tous les instruments de mesure angulaire, à savoir : les cercles divisés, l'alidade à pinnules ou à lunette, les verniers, les vis de rappel ou de rectification, les niveaux ou le fil à plomb.

Alidade à pinnules.

Pour mesurer l'angle compris entre les directions de deux objets A et B vus d'un point O, on place dans le plan AOB un cercle divisé en degrés et en minutes, au centre duquel tourne une règle ou alidade que l'on dirige successivement sur les deux objets, dans le sens où les divisions croissent sur le limbe. A cette alidade est fixée une seconde règle, en forme de rayon OF, qui porte un trait de repère, ou, comme on le dit souvent, la ligne de foi. Les pinnules sont deux petites plaques assemblées perpendiculairement sur la première règle; l'une d'elles porte un petit trou oculaire, l'autre

une ouverture plus large au travers de laquelle on a tendu deux fils en croix. La ligne de visée est déterminée par le point de croisement de ces deux fils et le centre du trou oculaire derrière lequel l'œil se place. On voit ainsi une faible partie de l'espace, limitée

Fig. 29.



circulairement, et sur laquelle vient se projeter la croisée des fils du réticule. Lorsque l'alidade est dirigée sur l'objet A, cet objet apparaît couvert centralement par la croisée des fils. On lit alors sur le limbe la division qui répond à la ligne de foi, puis on fait tourner l'alidade de manière à la pointer sur l'objet B.

Si, dans les deux positions, on a lu sur le limbe les divisions u et u' marquées successivement par la ligne de foi, l'angle cherché a pour mesure $u' - u$.

Les conditions qu'un tel instrument doit remplir sont faciles à énumérer. La ligne de visée doit être parallèle au plan du limbe gradué ; l'axe autour duquel tourne l'alidade doit être perpendiculaire à ce plan ; le centre de la rotation de l'alidade doit coïncider exactement avec le centre du limbe. La graduation doit être exacte ; il faut être en état d'apprécier la petite quantité dont la ligne de foi aura dépassé le trait de la graduation le plus voisin ; enfin il faut pouvoir imprimer, à la main, des mouvements doux très délicats à l'alidade, afin de l'amener à pointer exactement dans la direction voulue.

Substitution des lunettes aux pinnules.

L'alidade à pinnules est encore usitée dans l'arpentage, dans les pièces d'artillerie et dans toutes les mesures qu'on effectue à l'œil nu. Elle ne peut donner qu'un pointé grossier, dont la précision ne dépasse pas 1′ ou 2′. Son inconvénient capital et irremédiable consiste en ce que le pointé se fait par vision confuse, car l'œil ne saurait s'accommoder à la fois à trois points inégalement éloignés,

à savoir les deux pinnules et l'objet. De plus, quand il s'agit des astres, l'observateur ne les voit jamais avec netteté; il lui faudrait pour cela un œil infiniment presbyte. Vers la fin du XVIIe siècle, les astronomes (Picard et Auzout) eurent l'idée de substituer une lunette aux pinnules de l'alidade sur leurs instruments de mesure. Ils remplacèrent la règle par le corps même de la lunette, la croisée des fils par une lentille biconvexe, et le petit trou oculaire par une ouverture circulaire un peu plus large où ils placèrent la croisée des fils. On se refusa d'abord à croire à la légitimité de cette substitution; les observateurs voyaient bien un des points de la ligne de visée, mais, dans la lentille objective, ils ne retrouvaient plus le second point, nécessaire pourtant pour définir une direction. Il suffit de se reporter à la formation des images dans une lunette pour comprendre que ce second point n'est autre que le centre optique de la lunette objective.

En effet, tout faisceau de lumière émané d'un point éloigné et tombant sur la surface de l'objectif est transformé, par la réfraction qu'il subit en traversant cette lentille, en un autre faisceau conique de lumière convergent, dont le sommet n'est autre que l'image de ce point. Ces deux faisceaux ont même axe, et cet axe passe toujours et dans tous les cas par un certain point situé à l'intérieur de la lentille et qui en forme le centre optique. Il suffit donc que l'image du point extérieur se forme dans le plan du réticule et coïncide avec la croisée des fils pour que l'axe optique soit dirigé sur ce point, avec la même exactitude géométrique que dans le cas des deux pinnules.

Pour opérer cette coïncidence, l'œil doit se placer en arrière du réticule, à la distance de la vision distincte, de manière à voir à la fois ce réticule et l'image du point visé, laquelle vient justement se former dans le plan du réticule. La vision est donc parfaitement nette. Si les objets visés successivement se trouvent à des distances très grandes par rapport à la longueur de la lunette, dix ou vingt mille fois plus grandes, par exemple, leurs images se formeront dans un seul et même plan focal principal de l'objectif, plan où le réticule pourra être fixé une fois pour toutes.

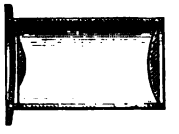
Afin de mieux voir la croisée des fils et l'image de l'objet, on se sert d'une petite loupe nommée *oculaire,* et fixée au tube de la lunette de manière que chaque observateur puisse la faire glisser

dans ce tube et la placer à la portée de sa vue. Alors il voit avec une netteté parfaite et avec un certain grossissement la croisée des fils et l'image de l'objet, et le pointé acquiert une exactitude tout à fait inconnue des anciens. Autrefois les observations se faisaient avec une erreur probable de 1′ à 2′; aujourd'hui l'erreur probable n'est guère que de 0″,1 à 0″,2 avec des lunettes de dimensions médiocres, comme celles des instruments portatifs.

Lunettes astronomiques.

Les lunettes actuelles doivent être achromatiques; à cet effet leur objectif se compose de deux lentilles, l'une biconvexe et extérieure en verre commun (*crown glass*), l'autre biconcave ou plan-concave en cristal, c'est-à-dire en verre lourd à base de plomb (*flint glass*), placée en arrière de la première. L'oculaire astrono-

Fig. 30.



mique se compose de deux lentilles plan-convexes, disposées de manière à former une loupe, c'est-à-dire à donner, très près de la dernière lentille, une image réelle des objets éloignés. On le nomme *oculaire positif*, par opposition aux oculaires négatifs qui ne donnent que des images virtuelles, et dont on ne saurait tirer parti dans les lunettes destinées aux mesures.

Pour éprouver une lunette on la dirige vers une étoile brillante. Le diamètre angulaire d'une étoile étant tout à fait inappréciable, celle-ci se comporte comme un simple point lumineux. L'image d'un tel objet ne saurait se réduire à un point, à cause des phénomènes de diffraction qui se produisent aux bords de l'objectif; elle a néanmoins un caractère géométrique très net, lequel devient sensible lorsque le ciel est pur. Elle apparaît en effet comme un très petit disque dont l'intensité décroît très rapidement sur les bords, et présente un peu plus loin une série très accentuée de minima et de maxima, c'est-à-dire une série d'anneaux alternative-

ment obscurs et lumineux entourant le point brillant. Si l'objectif est de mauvaise qualité, ces anneaux sont déformés et l'image prend un aspect irrégulier. Pendant le jour, l'éclairement du fond du ciel, sur lequel l'étoile est aperçue au moyen d'une lunette, réduit l'image de l'étoile à la petite masse centrale de lumière. C'est sur ces astres que le pointé acquiert la précision dont nous avons parlé plus haut.

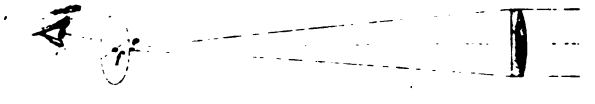
Mise au point. Réticule.

Pour se servir d'une lunette il faut avant tout la bien mettre au point. Cette opération est double. En premier lieu, il faut que le réticule soit placé dans le plan focal où se forme l'image du point visé; en second lieu, l'oculaire doit être mis à la distance exacte du réticule où l'on voit d'une vision parfaitement nette les fils et l'objet.

Pour cela on commence par mettre l'oculaire au point du réticule en l'enfonçant plus ou moins dans le tube porte-fils. Quand on voit nettement les fils, on fait glisser le tube porte-fils (avec l'oculaire, bien entendu) dans le tuyau de la lunette, de manière à bien voir l'image. Alors la croisée des fils et l'image sont dans le même plan.

Pour opérer cette indispensable rectification avec exactitude, il faut la soumettre à une petite épreuve, qui consiste à abaisser ou à élever l'œil autant que possible devant l'oculaire. Si l'étoile ne quitte pas le fil horizontal, la mise au point est parfaite. Si au contraire l'étoile s'élève au-dessus du fil quand l'œil s'élève, le réticule est un peu trop en avant: c'est ce qu'on nomme la *parallaxe des fils*. Pour la détruire, il faut enfoncer le tube du réticule dans la lunette; on devra le retirer un peu dans le cas contraire. C'est ce que montre la figure suivante.

Fig. 31.



Le réticule doit être ensuite fixé invariablement au tuyau de la lunette à l'aide de ses vis propres; on est certain alors que le

pointé ne sera pas influencé par la situation que l'œil peut prendre devant l'oculaire.

C'est près de l'axe géométrique, sur lequel les lentilles de l'objectif ont été centrées par l'artiste, que les images sont les meilleures. Il convient donc que la croisée des fils soit située à très peu près sur cet axe. Mais cette condition n'est nullement nécessaire; on peut déplacer la croisée des fils dans son plan pour donner une position convenable à l'axe optique, c'est-à-dire à la ligne de visée. Le tube porte-fils a même deux vis opposées qui pressent sur la plaque circulaire du réticule et permettent de le mouvoir dans son propre plan, à la condition de tourner ces deux vis en sens opposés. On a besoin de recourir à cette manœuvre quand on veut rendre l'axe optique ou la ligne de visée exactement perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette.

Pour la théorie des lentilles et des lunettes, nous renvoyons aux Traités de Physique. Nous rappellerons seulement que la définition qu'on y donne du champ d'une lunette n'est pas applicable à nos instruments. Pour ceux-ci, le champ, non pas de la vision, mais de l'observation, est l'angle sous lequel on verrait, du centre optique de l'objectif, l'ouverture circulaire de la plaque du réticule. Le champ de vision est d'ordinaire bien plus restreint par le diaphragme intérieur de l'oculaire lui-même; mais on peut mouvoir l'oculaire devant le réticule de manière à parcourir entièrement le champ que nous venons de définir.

Disons aussi, en terminant, que la notion ordinaire du centre optique de l'objectif suppose que l'épaisseur de l'objectif est négligeable par rapport à sa longueur focale. Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans la réalité, cette notion doit être modifiée. A la place d'un centre optique unique par lequel passeraient les axes des pinceaux de lumière incidents et réfractés, il y a, pour chaque objectif, deux *points principaux* I et E, placés sur la ligne des centres des surfaces sphériques de l'objectif. La ligne de visée est déterminée intérieurement par le point principal intérieur I et la croisée des fils; extérieurement par le point principal extérieur E et l'objet. Ces deux droites ne coïncident pas en toute rigueur, mais sont parallèles.

Verniers.

Les verniers appliqués aux cercles gradués sont fondés sur les mêmes principes que les verniers appliqués aux règles divisées. Dans la plupart des cercles, les divisions vont de 10′ en 10′, ce qui fait 2160 divisions sur le limbe entier. Or le diamètre de celui-ci n'a pas plus de $0^m,30$; on ne saurait donc les multiplier davantage sans confusion. A la vue simple, on ne peut guère apprécier que le dixième d'une division et juger, par conséquent, de la position de l'alidade qu'à 1′ près tout au plus. Avec le vernier on pousse la précision jusqu'aux 10″ et même aux 5″.

Pour que le vernier donne les 10″ tandis que les divisions en valent 600, il faut apprécier $\frac{1}{60}$ d'une division. Pour cela l'artiste qui a construit l'instrument a donné au vernier une longueur de 59 divisions du limbe et l'a divisé en 60 parties égales. La différence des deux divisions du limbe et du vernier est donc bien de 10″. Il en résulte que, si le zéro du vernier (la ligne de foi) coïncide avec le trait 90° du limbe, par exemple, le trait suivant du vernier sera en retard de 10″ sur la division 90° 10′ du limbe. Pour placer le vernier à 90° 0′ 10″, il suffira de le faire avancer un peu jusqu'à ce que la coïncidence ait lieu, non pour le premier trait du vernier, mais pour le second. De même, pour que la lecture du vernier soit de 90° 0′ 20″, il faudra mettre le troisième trait du vernier en coïncidence avec le trait voisin du limbe. De là le système de numérotage des divisions du vernier. Les 60 traits de division sont d'inégales longueurs : les plus longues, de six en six, sont numérotées en minutes; les divisions intermédiaires donnent les dizaines de secondes. Pour lire le vernier, il faut donc : 1° noter la division du limbe qui précède immédiatement le zéro du vernier, ce qui donne les degrés et les dizaines de minutes; 2° chercher à la loupe le trait du vernier qui se trouve en coïncidence avec un trait du limbe et lire, sur la graduation du vernier, les minutes et dizaines de secondes correspondant à ce trait. Avec un peu d'attention, on parvient même à estimer très bien les 5″.

Cet ingénieux accessoire est fondé sur la grande exactitude avec laquelle l'œil juge de la coïncidence de direction de deux traits de

même force situés, sur le même plan, dans le prolongement l'un de l'autre. Il est nécessaire d'employer une loupe et surtout d'éclairer uniformément le limbe et le vernier.

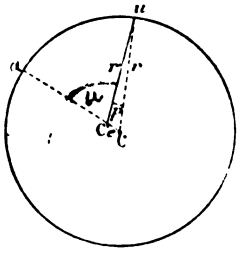
Vis de rappel. Vis micrométrique.

Sur un cercle de $0^m,15$ de rayon, les $10''$ ont une longueur de $10\,\frac{0^m,15}{206265} = \frac{3}{400}$ de millimètre. Il serait impossible de faire tourner un pareil cercle à la main d'une si petite quantité. Notre main n'est capable que de mouvements relativement grossiers et de grande amplitude. On y remédie en prenant pour intermédiaire une vis à filets fins et à pas très petit, de quelques dixièmes de millimètre seulement. Alors, pour produire dans l'alidade, et par suite dans la lunette, un déplacement de $\frac{1}{100}$ de millimètre, on aura à faire tourner la vis d'une portion notable de la circonférence. On arrive ainsi à pointer la lunette, avec une précision comparable à celle de la vision, par quelques tâtonnements, en faisant tourner la vis de rappel tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. Mais il est essentiel au succès de cette manœuvre que la vis n'ait pas de *temps perdu* en tournant dans son écrou. S'il s'agit de pousser un obstacle avec une vis agissant sur son écrou fixé audit obstacle, les filets de la vis portent sur ceux de l'écrou par une seule de leurs deux faces, celle qui est à la main. Si l'on tourne la vis en sens contraire pour tirer à soi l'obstacle, les filets de la vis ne commencent à agir que lorsqu'ils s'engagent avec ceux de l'écrou par leur face opposée. Si peu qu'il y ait de jeu, et un peu de jeu est nécessaire au mouvement, on tourne à vide la vis entre ces deux moments sans produire aucun effet, alors qu'on croit en avoir produit un. On supprime le temps perdu au moyen d'un ressort antagoniste qui force la vis à agir toujours par la même face des filets, ou en coupant l'écrou en deux et en maintenant ses deux moitiés contre la vis par la pression d'un ressort. On commence donc par faire tourner l'instrument à la main pour amener la lunette vers l'objet; pour achever le pointé avec la précision requise, on fixe l'alidade au limbe par une mâchoire, et l'on achève l'opération avec la vis qui a son point d'appui sur le limbe et dont l'écrou est porté par cette mâchoire.

Erreurs d'excentricité; leur élimination au moyen de verniers opposés.

1° Le pivot de l'alidade peut n'être pas rigoureusement centré sur le cercle limbe. Soient (*fig.* 32) C le centre du limbe, C′ celui de l'alidade, α la division à laquelle aboutirait une droite qui joindrait ces deux centres, C′u la direction actuelle de la ligne de foi du

Fig. 32.



cercle alidade lorsque la lunette est pointée sur un objet; u, c'est-à-dire la division du limbe à laquelle s'est arrêtée la ligne de foi, indique une direction Cu, laquelle diffère de la précédente d'un très petit angle C′uC que nous désignerons par p. Posons enfin CC′ $= e$, C$u = r$, C′$u = r'$; l'angle en C sera $u - \alpha$ et nous aurons

$$r' \sin p = e \sin(u - \alpha),$$
$$r' \cos p = r - e \cos(u - \alpha).$$

On en tire

$$\operatorname{tang} p = \frac{\frac{e}{r} \sin(u - \alpha)}{1 - \frac{e}{r} \cos(u - \alpha)};$$

c'est la formule trouvée pour la transformation des coordonnées par déplacement d'origine.

En réduisant en série, on trouve

$$p = \frac{e}{r} \sin(u - \alpha) + \frac{1}{2} \frac{e^2}{r^2} \sin 2(u - \alpha) + \frac{1}{3} \frac{e^3}{r^3} \sin 3(u - \alpha) + \ldots.$$

Le premier terme suffit toujours; p étant calculé, on l'ajoutera à la lecture u du limbe pour avoir la vraie direction de la lunette.

Il est d'ailleurs aisé de déterminer une fois pour toutes les constantes de cette formule, mais nous allons voir par quel artifice on parvient à éliminer cette erreur.

2° Dans tout instrument de mesure il y a une autre sorte d'excentricité, non plus fixe, mais fluctuante : c'est celle qui provient du jeu de l'axe de rotation dans sa douille, jeu nécessaire puisque, s'il n'existait pas, le mouvement serait impossible. La formule précédente devant être écrite, pour avoir p en secondes, comme ceci,

$$p = 206265'' \frac{e}{r} \sin(u - \alpha),$$

on voit qu'un jeu de $\frac{1}{10000}$ de r, c'est-à-dire ici de $\frac{15}{1000}$ de millimètre seulement, donnerait à p une valeur de 20″.

Heureusement on a trouvé dans l'emploi de deux verniers opposés le moyen d'éliminer toute excentricité de quelque cause qu'elle provienne. Soient u et u' les lectures de ces deux verniers lorsque la lunette est pointée dans la direction Cu. Pour corriger les lectures u et u', il faudrait leur ajouter les petits angles correspondants p et p' ; on aurait ainsi, pour le premier vernier,

$$u + \frac{e}{r} \sin(u - \alpha),$$

pour le deuxième,

$$u' + \frac{e}{r} \sin(u' - \alpha).$$

Or u' est à très peu près égal à $180° + u$, puisque les deux verniers sont opposés ; les deux termes correctifs sont donc sensiblement égaux et de signes contraires ; ils se détruisent quand on fait la somme des lectures corrigées. La moyenne des deux verniers, c'est-à-dire $\frac{u' + u}{2}$, se trouve donc exempte de toute erreur d'excentricité.

Il en serait de même de la moyenne des lectures faites à n verniers équidistants.

Erreurs de division.

Si, au moment de graduer le limbe, l'artiste ne l'a pas centré rigoureusement sur la plate-forme de sa machine à diviser, il en

résultera, dans la division tracée par la machine, une erreur de la forme

$$\frac{e}{r}\sin(u-\alpha)+\frac{1}{2}\frac{e^2}{r^2}\sin 2(u-\alpha)+\frac{1}{3}\frac{e^3}{r^3}\sin 3(u-\alpha)+\ldots.$$

S'il a laissé subsister une petite inclinaison B du cercle limbe sur sa plate-forme, il en résultera, dans les divisions obtenues, une erreur de la forme

$$-\tang^2\frac{B}{2}\sin 2(u-\beta)+\tfrac{1}{2}\tang^4\frac{B}{2}\sin 4(u-\beta)-\ldots.$$

De même, toutes les erreurs d'origine quelconque pourront être représentées en bloc par une série de la forme

$$a\sin(u+A)+b\sin 2(u+B)+C\sin 3(u+C)+\ldots.$$

C'est la série de Fourier. Quand la division est bien faite, ces termes vont en diminuant assez rapidement et deviennent insensibles au delà d'un certain degré de multiplicité de l'arc u.

Les astronomes s'astreignent à déterminer l'erreur de chaque trait de division de leurs cercles. L'instrument étant placé horizontalement, on mesure, comme d'ordinaire, entre deux objets convenablement choisis, un angle très peu différent d'un sous-multiple de la circonférence, de 10°, par exemple, en commençant par la division o. Puis on recommence cette mesure en partant du point du limbe auquel on est arrivé dans la première opération. En continuant ce travail jusqu'à ce qu'on retombe à peu près sur le point de départ, c'est-à-dire près de o°, on trouve $o^\circ+\varepsilon$, ε étant un petit arc obtenu à l'aide du vernier et on a, pour la valeur de l'angle, $\frac{360^\circ+\varepsilon}{36}$. Or cette valeur est indépendante des erreurs de division, puisqu'on n'a employé qu'un seul trait, celui de o°. En comparant cet angle parfaitement exact avec les mesures individuelles obtenues en diverses régions du limbe, on a les erreurs des traits de 10° en 10°. On opérerait de même pour avoir les erreurs des traits de 3° en 3°, etc. Les géodésiens préfèrent éliminer les erreurs de division à l'aide d'un agencement particulier de leurs mesures et de leurs instruments.

Cette élimination est fondée sur ce théorème :

La moyenne des lectures faites à n verniers équidistants est exempte de tous les termes de la série des erreurs dont le degré de multiplicité n'est pas divisible par n.

En effet, la lecture du premier vernier étant u, celle du deuxième, u_1, sera à très peu près égale à $u + \frac{360^\circ}{n}$; celle du troisième, u_2, sera à très peu près $u + 2\frac{360^\circ}{n}$, etc. Si nous désignons le terme général de la série de Fourier par

$$x \sin k(u + X),$$

k étant un nombre entier, les lectures corrigées de ce terme seront :

Premier vernier....	u	$+ x \sin k(u + X)$,
Deuxième »	u_1	$+ x \sin k(u + \frac{360^\circ}{n} + X)$,
Troisième »	u_2	$+ x \sin k(u + 2\frac{360^\circ}{n} + X)$,
.....	.....	,
$n^{\text{ième}}$ »	u_{n-1}	$+ x \sin k[u + (n-1)\frac{360^\circ}{n} + X]$.

Or la somme des sinus d'arcs croissant, comme ceux-ci, en progression arithmétique, est nulle quand, après le dernier, on retombe sur le point de départ. La moyenne des verniers équi-

$$\frac{u + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}}{n},$$

distants est donc exempte de l'erreur représentée par ce terme général.

Il faut excepter le cas où k serait divisible par n, car alors la raison de la progression $k\frac{360^\circ}{n}$ serait d'un nombre entier de circonférences, ce qui ramènerait tous les termes correctifs ci-dessus à la valeur du premier, $x \sin k(u + X)$. La moyenne des n verniers serait donc elle-même affectée de ce terme, tout comme si l'on n'avait lu qu'un seul vernier.

Les théodolites ont au moins deux verniers opposés, en sorte que les termes d'ordre impair de la série de Fourier disparaissent. Les cercles azimutaux du Dépôt de la Guerre ont quatre verniers équidistants; ils annulent les trois premiers termes de la série, et n'y laissent subsister que les termes $d \sin 4(u + D)$, $h \sin 8(u - H)$, ... Les grands cercles méridiens des astronomes ont six verniers.

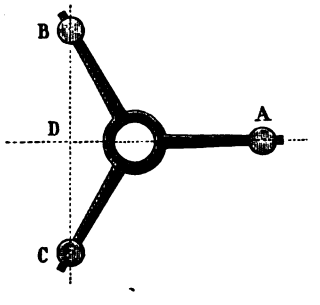
CHAPITRE IV.

DESCRIPTION ET USAGE DU THÉODOLITE.

Le théodolite est destiné à mesurer les coordonnées zénithales, le z et l'A d'un astre ou d'un point terrestre quelconque visible sur l'horizon de l'observateur. Son axe principal doit être placé verticalement. La lunette est portée par un axe secondaire perpendiculaire au premier et par conséquent horizontal. La lunette tourne autour de cet axe sur un limbe vertical. Le plan vertical que la ligne de visée décrit ainsi peut prendre toutes les positions autour de l'axe principal de l'instrument. Les angles dièdres que forme ce plan mobile avec un plan vertical pris pour origine sont les azimuts, et se lisent sur la graduation d'un cercle horizontal fixé au pied du théodolite.

C'est au fond un équatorial redressé verticalement ; le mérite de cet instrument et du système de coordonnées sphériques qu'il permet de mesurer tient à ce qu'il est très facile de déterminer, à chaque instant, la direction de la verticale à l'aide d'un fil à plomb ou d'un niveau, et de donner cette direction à l'axe.

Fig. 33.



A cet effet, l'instrument repose sur trois pieds armés de vis à filets serrés et à larges têtes (*fig.* 33). C'est en agissant sur ces vis qu'on

parvient très rapidement à amener l'axe du théodolite dans la direction de la verticale. Soient A, B, C ces trois vis formant un triangle équilatéral, et jouant sur trois petites pièces de cuivre scellées dans le pilier en pierre de taille qu'il faut donner pour support à l'instrument.

Considérez dans ce triangle l'un des côtés BC et la droite AD perpendiculaire à BC. En agissant sur la vis A, on fera tourner l'instrument autour de la droite BC; en agissant des deux mains, mais en sens contraire, sur les vis B et C, on fera tourner l'instrument autour de la droite AD. Par le premier mouvement on rendra l'axe parallèle au plan vertical passant par BC; au moyen du second, on le rendra parallèle au plan vertical passant par AD. On l'amènera ainsi dans la direction de l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire de la verticale.

L'opération se fait d'abord par à peu près, de sentiment; on l'achève, comme nous le verrons tout à l'heure, en se guidant sur un niveau ou un fil à plomb.

Cette espèce de trépied ABC supporte une colonne creuse, une douille, dont l'intérieur est légèrement conique et dans laquelle tourne l'axe principal. Le dessin ci-joint (*fig.* 34) représente une coupe du théodolite. Son axe est légèrement conique comme la douille elle-même. Pour diminuer le frottement, il repose, par sa pointe inférieure, sur un très fort ressort d'acier fixé au trépied, ressort dont l'élasticité fait équilibre à la presque totalité du poids de l'instrument. La douille fixe porte le cercle divisé horizontal; l'axe porte un cercle concentrique au premier, sur lequel sont tracés deux verniers opposés. Là se mesurent les azimuts.

L'axe supporte à sa partie supérieure une traverse horizontale sur laquelle repose l'axe secondaire, celui de la lunette. Celle-ci se meut sur un limbe gradué, fixé verticalement à la traverse. Il y a là encore à distinguer le limbe gradué fixe, et un cercle intérieur portant une ligne de foi et des verniers opposés. Là se mesurent les distances zénithales. Un contre-poids placé au bout opposé de la traverse équilibre la lunette et son cercle alidade, de sorte que le centre de gravité de tout l'appareil soit dans l'axe vertical.

Les conditions géométriques sont au nombre de trois :

1° L'axe principal doit être vertical.

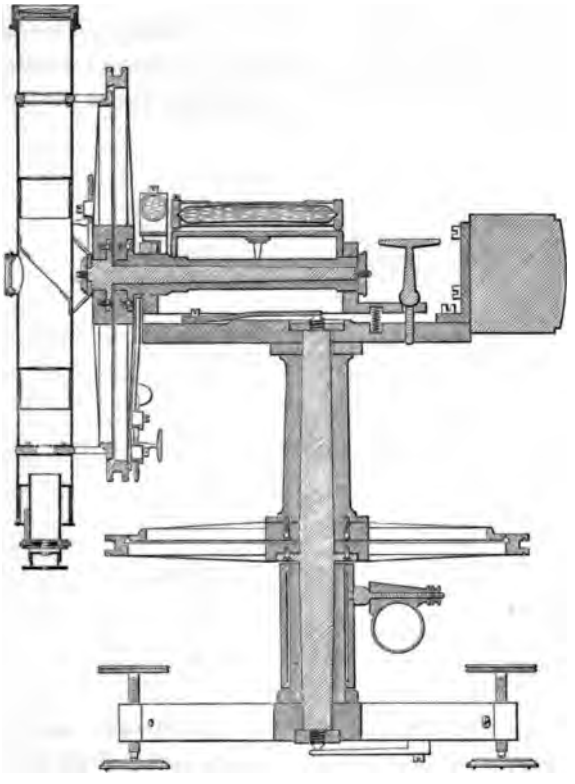
2° L'axe secondaire qui porte la lunette doit être perpendiculaire

au premier, ce qui revient à dire qu'il doit être horizontal quand le premier est vertical.

3° La ligne de visée, ou axe optique de la lunette, doit être perpendiculaire à son axe de rotation.

Et comme tout instrument est susceptible de se déranger par l'effet de causes diverses, principalement par les moindres variations

Fig. 34.

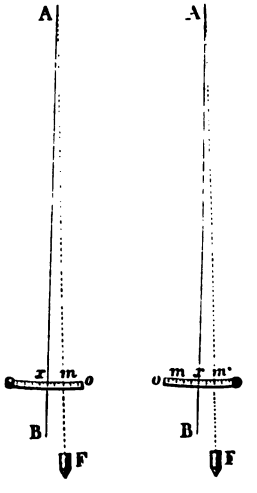


de température, il faut que l'on puisse à chaque instant opérer les trois rectifications nécessaires, ou déterminer les trois très petites erreurs qu'une rectification incomplète aura laissées subsister. Nous allons donc les passer en revue.

Rectification de l'axe principal. Fil à plomb. Niveaux.

Soient (*fig.* 35) AB un axe quelconque tournant autour de deux points fixes A et B, AF le fil à plomb fixé en A, *om* un petit arc gradué plaqué à cet axe et amené par rotation dans le plan vertical FAB. Désignons par *o* l'origine de la graduation, par x la division qui répond à l'axe AB et par m celle sur laquelle vient battre le fil à plomb. L'arc xm donnera l'inclinaison i de l'axe. Mais x est inconnu. Pour l'éliminer, il faut opérer par retournement. Faisons tourner l'appareil de 180° autour de AB. Le point *o* et la division m passeront, de la

Fig. 35.



droite à la gauche, dans la position symétrique marquée sur la deuxième figure. Le fil à plomb viendra battre l'arc de cercle sur une nouvelle division m', évidemment symétrique à la première par rapport à AB. Donc

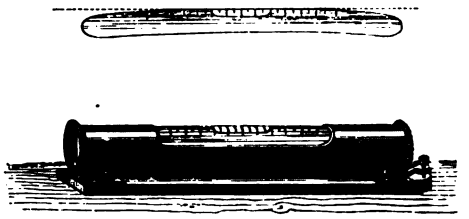
$$i = \frac{m' - m}{2}, \quad x = \frac{m' + m}{2}.$$

Si l'on juge à propos de corriger l'inclinaison, il faudra agir sur les vis du pied de manière à amener la division x, désormais connue, sous le fil à plomb.

Niveau à bulle d'air.

Prenons un tube cylindrique en verre (*fig.* 36), fermé aux deux bouts, très légèrement courbé en arc de cercle et rempli d'un liquide très mobile (l'éther), sauf une petite bulle allongée qui va se loger à la partie supérieure du tube, par la même raison que le plomb du fil précédent va se placer au point le plus bas par rapport au point d'attache.

Fig. 36.



Ce tube, enfermé dans une monture en cuivre, est fixé à l'axe du théodolite. Sa surface supérieure est graduée en divisions égales.

Fig. 37.

Si on lit les divisions b, b' qui répondent aux deux bouts de la bulle, la division $\frac{b+b'}{2}$ sera le point culminant du tube, et le rayon idéal

qui joint le milieu A de l'arc bb' au centre sera vertical. Ce rayon va jouer le rôle du fil à plomb.

Pour mesurer l'inclinaison de l'axe, estimée dans un plan vertical quelconque, amenez le niveau dans ce plan en faisant tourner l'instrument, et notez la division $n = \frac{b+b'}{2}$ qui répond au milieu de la bulle. Ensuite faites tourner l'instrument de 180°, de manière à ramener le niveau dans le même plan, mais renversé bout pour bout. Soit n' la moyenne des lectures faites aux deux extrémités de la bulle. On aura, comme par le fil à plomb,

$$i = \frac{n'-n}{2}, \quad x = \frac{n'+n}{2},$$

x étant la division où il faut amener le milieu de la bulle pour rendre l'axe vertical dans le plan du retournement. Si $\frac{n'-n}{2}$ est positif, l'axe penche de cette quantité du côté où se trouve le zéro de la graduation du niveau au moment de la seconde lecture, c'est-à-dire après le retournement.

L'avantage du niveau sur le fil à plomb consiste en ce qu'on n'a pas besoin de s'occuper du centre et par conséquent du rayon de l'arc du niveau; on peut donc donner au tube du niveau une courbure telle que le rayon soit de 200^m ou de 400^m. Dans le premier cas, l'arc de $1''$ a pour longueur, sur le tube,

$$\frac{200000^{mm}}{206265} = 1^{mm} \text{ à peu près.}$$

Dans le second cas, cet arc a 2^{mm}, de sorte que les dixièmes de seconde peuvent être évalués avec précision (¹).

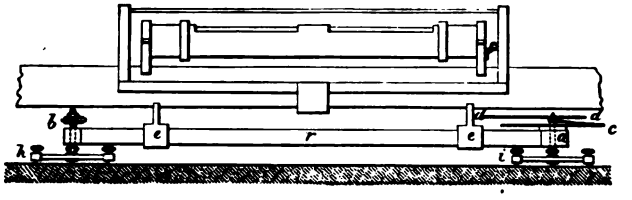
Lorsque les niveaux ont une pareille sensibilité, les mouvements de la bulle sont très lents : pour en lire les extrémités sur la gra-

(¹) On ne trouverait guère de tubes de verre qui aient naturellement une pareille courbure sur une étendue suffisante; il faut en tailler l'intérieur. Pour cela on engage dans le tube un mandrin d'acier garni d'émeri et porté par un tour à l'une de ses extrémités. Le mandrin tournant rapidement autour de son axe, on presse légèrement sur lui la partie supérieure du tube en donnant à celui-ci un mouvement de va-et-vient longitudinal. Le verre et l'acier s'usent mutuellement, jusqu'à ce que le contact se produise dans toute l'étendue du tube, ce qui ne peut avoir lieu que si le tube et le mandrin ont pris la forme d'un arc de cercle à grand

duation du tube, il faut attendre patiemment que la bulle soit arrivée à sa position d'équilibre. D'autre part, la moindre variation de température dans l'appareil fait marcher la bulle et peut en vicier les indications. On lit donc les divisions de loin, au besoin avec une petite lunette, afin d'éviter l'échauffement irrégulier dû au voisinage de l'observateur. Ces instruments délicats doivent être traités avec soin.

Pour déterminer la valeur angulaire des divisions, on place le

Fig. 38.



niveau sur un appareil spécial (*fig.* 38) consistant en une longue règle posée sur un support, d'un côté par un couteau, de l'autre par une vis micrométrique analogue à celle des sphéromètres. Lorsque la bulle est au repos, on enregistre la position de la bulle; puis, en soulevant peu à peu l'extrémité de la règle à l'aide de la vis, on fait parcourir à la bulle un certain nombre m de divisions. La variation h de la hauteur de la règle est donnée par la vis; si l en est la longueur, on a

$$\frac{h}{l} = \text{tang}\, i \quad \text{et} \quad i = n \text{ divisions},$$

ce qui fait connaître la valeur d'une division en secondes. On examine ensuite si la courbure du niveau est bien régulière, c'est-à-dire si la valeur angulaire des divisions est bien la même dans

---

rayon, ou plutôt celle d'une surface engendrée par la révolution d'un tel arc autour de l'axe.

La sensibilité d'un niveau est contrariée par la capillarité. Près des parois du tube la surface libre du liquide se recourbe fortement sous forme de ménisque. Si la bulle était réduite à un simple globule, elle serait retenue n'importe où par la capillarité. Pour vaincre cet obstacle, il faut donner une grande longueur à la bulle et au tube; les mouvements sont alors très lents et ne restent bien réguliers que si l'on évite tout échauffement extérieur.

toute l'étendue de la graduation. Nous supposerons dorénavant que cette conversion des parties du niveau en secondes a toujours été opérée.

Dans la plupart des instruments, le niveau a le zéro au milieu du tube et non à l'un des bouts, comme nous l'avons tacitement supposé plus haut; alors il faut convenir de compter les divisions positivement vers un bout de l'appareil et négativement vers l'autre. Cette disposition a l'avantage de montrer, du premier coup d'œil, si l'axe du théodolite est bien vertical, car alors le milieu de la bulle doit être au zéro, autrement dit $b = -b'$. Mais en ce cas le niveau doit être bien réglé lui-même et être muni d'une vis de rectification qui permette de déplacer un peu le tube par rapport à sa monture, ou, si l'on veut, par rapport à l'axe qui le porte.

La rectification de l'axe à l'aide d'un niveau de ce genre, et celle du niveau lui-même s'opèrent simultanément de la manière suivante. On fait varier l'inclinaison de l'axe avec ses vis propres jusqu'à ce que la bulle du niveau marque zéro. On opère le retournement à 180°. Si la bulle reste au zéro, le niveau est bien réglé et l'axe est bien vertical. Si la bulle s'écarte du zéro, on l'y ramène moitié par la vis propre du niveau, moitié par celles du pied de l'instrument.

Rectification de l'axe secondaire.

L'axe principal étant bien vertical, l'axe secondaire qui lui est perpendiculaire doit être alors horizontal. On s'en assure à l'aide d'un second niveau placé sur cet axe. Soit n le milieu de la bulle dans une position quelconque de l'instrument. On enlève le niveau et on le retourne bout pour bout en le replaçant sur l'axe horizontal. Soit n' la division qui répond au milieu de la bulle dans le second cas. On aura l'inclinaison i' de cet axe sur l'horizontale par

$$i' = \frac{n' - n}{2},$$

et l'angle de cet axe secondaire avec le principal sera $90° \pm i$. Pour corriger ce défaut, on agira sur une vis placée à l'extrémité

de cet axe et butant contre le châssis supérieur, jusqu'à ce que le milieu de la bulle marque $\frac{n+n'}{2}$.

Rectification de la ligne de visée.

Elle doit être perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette. Visons avec la lunette, à l'horizon, un signal assez éloigné pour que l'excentricité de la lunette soit vue, de ce signal, sous un angle négligeable, et soit u la division du limbe horizontal qui répond au vertical de ce signal, ou pour mieux dire à la ligne de foi du cercle alidade. Après avoir lu cette division (aux deux verniers), faisons tourner l'instrument de 180°. La lunette se trouvera à gauche de l'axe si dans la première observation elle se trouvait à droite. Pour la ramener sur le signal il faudra la faire tourner autour de son axe propre. Supposons qu'après avoir effectué ce second pointé on lise de nouveau la division correspondante du limbe azimutal, et soit u' cette lecture. Si la ligne de visée est bien perpendiculaire à l'axe horizontal de la lunette, on aura $u' = u + 180°$. Dans le cas contraire, α étant le petit défaut de position de la ligne de visée, on aura

$$u' - u = 180° \pm 2\alpha,$$

et, pour corriger cette erreur, il faudra : 1° amener la ligne de foi du cercle alidade horizontal sur la division $u' \mp \alpha$; 2° déplacer le réticule de la lunette à l'aide de ses vis propres jusqu'à ce que la croisée des fils couvre le signal ([1]).

Mesure des azimuts à l'aide du théodolite.

Ces trois rectifications étant opérées, l'instrument est en état de donner les coordonnées zénithales d'un point quelconque. Commençons par l'azimut.

([1]) Si le signal n'était pas assez éloigné, soient D sa distance, r la distance de la lunette à l'axe principal et β un petit angle donné par $\frac{r}{D} = \sin\beta$; l'opération précédente fournirait la relation $u' - u = 180° - \beta \pm 2\alpha$, et fera connaître l'erreur α de l'axe optique.

Comme l'origine des azimuts est déterminée par la direction du méridien, c'est-à-dire par un phénomène astronomique, l'instrument ne fournit par lui-même que des différences d'azimut entre deux astres B et C. Il faut distinguer ici les deux positions qu'on peut donner à la lunette pour pointer sur un point quelconque, à savoir, lunette à droite de l'axe principal ou lunette à gauche. Adoptons la première disposition. On pointera avec la lunette sur l'astre B, et on lira les deux verniers du cercle horizontal. Leur moyenne donnera la direction de la trace horizontale d'un plan passant par l'axe parallèlement à celui que décrirait actuellement la lunette. Ce sera évidemment le vertical même de l'astre, puisque l'excentricité de la lunette est nulle par rapport à sa distance de cet astre.

On fera tourner ensuite l'instrument autour de son axe vertical, de manière à amener le plan vertical décrit par la ligne de visée à passer par le second astre C, et on lira pareillement les indications du vernier du limbe horizontal. Soient u et u' les lectures correspondantes ; on aura, en désignant par A et A' les azimuts des astres B et C,

$$u' - u = A' - A.$$

Si, l'instrument étant bien réglé, on recommençait les mêmes mesures lunette à gauche, on retrouverait évidemment par d'autres lectures la même différence d'azimut.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'objets terrestres dont les distances au pied de l'instrument ne soient pas infiniment grandes par rapport à la longueur du bras qui porte excentriquement la lunette : l'excentricité de la lunette influera sur les directions où l'on voit les points B et C suivant qu'on les observera du côté droit ou du côté gauche, mais il est aisé d'agencer les mesures de manière à éliminer cette cause d'erreur. En effet, la vraie direction du point B vu du centre de l'instrument est donnée par la demi-somme des directions observées lunette à droite, puis lunette à gauche. Soient u et u'' les deux lectures ; on aura :

$$\text{Direction du point B} \ldots \quad \frac{u + u''}{2}$$

En opérant sur le point C, on aura de même, en désignant par

u' et u''' les deux lectures.

$$\text{Direction du point C.....} \quad \frac{u'+u'''}{2}.$$

Donc

$$\text{Différence d'azimut } A'-A = \frac{u'+u'''}{2} - \frac{u+u''}{2}.$$

Comme on peut l'écrire,

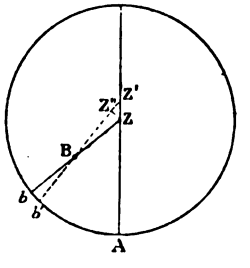
$$\frac{u'-u}{2} + \frac{u'''-u''}{2},$$

cela revient à mesurer la différence des azimuts lunette à droite, puis à la mesurer une seconde fois lunette à gauche et à prendre la moyenne des résultats. Cette moyenne sera exempte de l'excentricité de la lunette, et même du défaut de perpendicularité de l'axe optique sur l'axe de rotation.

Erreurs dues à une rectification imparfaite.

La seule qui ait de l'importance, parce qu'on ne peut l'éliminer par l'agencement des opérations, est celle qui provient d'une petite inclinaison i de l'axe principal sur la verticale. Pour nous en rendre compte, projetons le ciel sur le plan de la figure ci-dessous; l'horizon étant représenté par une circonférence, le zénith sera au centre, en Z. Le pôle de l'instrument sera en Z', l'arc ZZ'

Fig. 39.



mesurant l'inclinaison i qu'on lira sur le niveau. Soit B le point à observer; si nous prenons provisoirement le grand cercle Z'ZA pour origine des azimuts, l'azimut véritable sera AZB, tandis que l'azimut instrumental sera AZ'B. Sur le cercle de l'horizon, ces azimuts

ont pour mesure Ab et Ab'. Il s'agit de déterminer bb', c'est-à-dire ce qu'il faut ajouter à l'azimut instrumental pour obtenir le vrai azimut. On voit, sur la figure, que BZ $= z$, B$b = 90° - z$. Si l'on mène ZZ″ perpendiculaire à BZ′, on a

$$\text{angle B} = \frac{ZZ''}{\sin z} = \frac{bb'}{\sin Bb} = \frac{bb'}{\cos z},$$

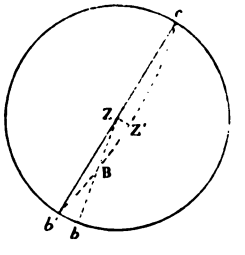
et par conséquent

$$bb' = \frac{ZZ''}{\operatorname{tang} z}.$$

Il est bien aisé de mesurer ZZ″ à l'aide du niveau : ce n'est, en effet, rien de plus que l'inclinaison de l'axe projeté sur un plan vertical perpendiculaire à la direction de l'objet B. On fera donc tourner tout l'instrument de 90° après avoir observé la direction du point B, et, dans cette position, on mesurera l'inclinaison de l'axe par la méthode ordinaire, puis on en déduira bb' par la formule précédente et on appliquera cette correction, avec le signe convenable, à la lecture du limbe obtenue pour le point B.

Si l'axe de la lunette n'est pas bien horizontal, il en résulte une nouvelle erreur dont il sera facile d'obtenir l'expression par le même genre de considération. Soit i' l'inclinaison ; le cercle $b'Z'c$ décrit par la lunette ne passera pas par le zénith Z (nous supposons l'axe principal bien rectifié), mais par un point Z′ tel que ZZ′ $= i'$.

Fig. 40.



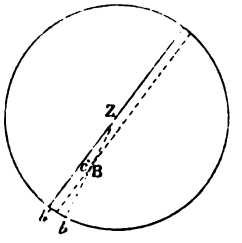
L'objet B, situé sur ce cercle, aura pour vertical le plan ZBb, tandis que l'instrument lui assignera le vertical ayant pour trace sur le limbe le rayon Zb'. On trouverait comme précédemment

$$bb' = \frac{i'}{\operatorname{tang} z}.$$

Mais si, après avoir observé B lunette à gauche, on recommence la même opération lunette à droite, le point Z′ passera de l'autre côté du point Z, et l'erreur d'azimut due à l'inclinaison i' changera de signe sans changer de valeur. Ainsi on l'éliminera en observant B dans les deux positions de l'instrument et en prenant la moyenne.

Si la ligne de visée n'est pas bien perpendiculaire à l'axe de rotation de la lunette, désignons l'angle de ces deux lignes par $90° \pm c$, c étant ce qu'on nomme l'*erreur de collimation*. La ligne de visée, en tournant autour de l'axe horizontal, décrira un cône et

Fig. 41.



dessinera sur le ciel un petit cercle passant à la distance c du zénith et par l'objet visé B. Le théodolite fournira la direction Zb', tandis que la vraie direction est Zb. L'erreur est donc ici

$$bZb' = \frac{c}{\sin ZB} = \frac{c}{\sin z}.$$

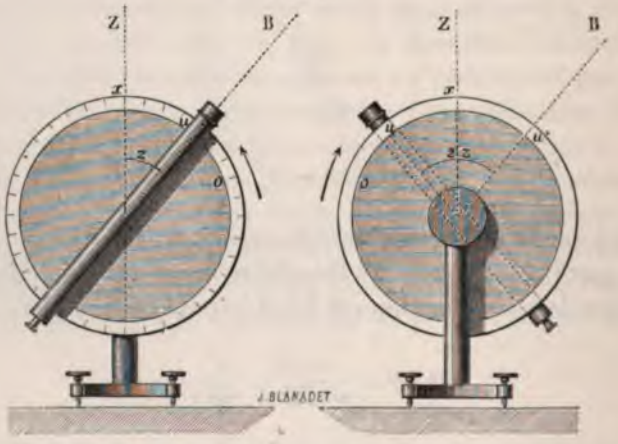
On l'élimine, comme précédemment, en observant la direction azimutale du point B dans les deux positions de l'instrument et en prenant la moyenne.

On a dû remarquer que nous avons étudié chaque erreur isolément, comme si les deux autres n'existaient pas. Les choses ne se passent pas ainsi en général; les trois erreurs se présentent à la fois, et, en toute rigueur, leurs effets dépendraient non seulement de leurs premières puissances, mais aussi des termes supérieurs comprenant leurs produits deux à deux, etc. Mais la marche suivie est légitime tant que ces termes supérieurs sont négligeables; or il faudrait une rectification bien grossière pour qu'ils ne le fussent pas.

Mesure des distances zénithales à l'aide du théodolite.

L'axe du théodolite étant bien vertical, on amène le plan vertical décrit par la lunette à passer par l'objet. Cela peut se faire de deux manières, lunette à droite ou lunette à gauche. On choisit, pour commencer, celle de ces deux positions (symétriques par rapport à l'axe) où les divisions du limbe vertical croissent en sens inverse de la distance qu'on veut mesurer du zénith à l'objet (celui de la flèche). Supposons que ce soit la première. On dirige la lunette sur ce point, on fixe le cercle alidade qui la supporte au cercle

Fig. 42.



limbe qui fait corps avec l'axe principal et on lit les verniers. Désignons par u leur moyenne. Si l'on connaissait la division x qui répond au zénith, $x - u$ serait la distance zénithale cherchée z.

Pour éliminer cette inconnue, on a recours au retournement. On fait décrire à l'instrument tout entier 180° autour de la verticale, puis, la lunette étant à gauche, on la dégage en desserrant la mâchoire qui la fixe au limbe vertical et on la fait tourner autour de son axe horizontal jusqu'à ce que la ligne de visée passe par le point B. La lunette a évidemment décrit ainsi $2z$; on la fixe de nouveau et on achève, au besoin, le pointé par la vis de rappel qui joint la mâchoire au cercle alidade. Enfin on lit les verniers, dont

la moyenne sera u'. On aura dès lors

$$z = \frac{u' - u}{2}, \quad x = \frac{u' + u}{2}.$$

S'il s'agit d'objets terrestres dont la distance n'est pas infinie par rapport à l'excentricité de la lunette, la distance zénithale ainsi obtenue sera un peu trop faible. On trouvera aisément que l'erreur sera, en désignant par e l'excentricité et par d la distance de l'objet,

$$\frac{1}{4}\left(\frac{e}{d}\right)^2 \cot z,$$

quantité absolument insensible dans la pratique.

Erreurs dues à une rectification imparfaite.

La seule dont il soit nécessaire de se préoccuper, c'est l'inclinaison de l'axe principal. Cette inclinaison, estimée dans le plan de l'objet observé, se reporte en entier sur la distance zénithale conclue, car le théodolite ne donne, en réalité, que la distance angulaire de l'objet observé à l'axe de l'instrument. Mais le niveau fournit immédiatement la correction nécessaire, pourvu qu'on lise ses indications dans les deux positions de l'instrument, au moment même du pointé ou du moins immédiatement après chaque pointé. On corrige même ainsi la très petite déviation que l'axe pourrait prendre, dans le retournement, par le jeu qu'il doit avoir dans sa douille.

Voici la règle à suivre à cet égard. Supposons d'abord que le niveau soit gradué à la manière des instruments astronomiques, c'est-à-dire avec le zéro à l'un des bouts, et que la graduation du niveau soit de sens opposé à celle du limbe vertical. Désignons par n la division qui répond au milieu de la bulle cercle à droite, c'est-à-dire pour le premier pointé, et par n' la lecture faite cercle à gauche, c'est-à-dire pour le second pointé; nous aurons

$$z = \frac{u' - u}{2} + \frac{n' - n}{2}.$$

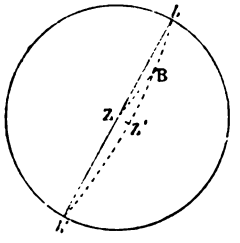
On se rend compte du signe + si l'on se rappelle qu'en ex-

primant l'inclinaison par $\frac{n'-n}{2}$ l'axe penche du côté où se trouve le zéro du niveau dans la première position, c'est-à-dire, ici, du côté où se trouve l'objet. Dans tous les cas, on applique la susdite correction avec son signe.

Quant aux corrections dues à l'inclinaison i' de l'axe de la lunette et à l'erreur c de collimation, les corrections applicables de ce chef à la distance zénithale observée sont du second ordre de petitesse par rapport à i et à c. Comme ces dernières peuvent toujours être réduites à quelques secondes, les premières sont absolument insensibles.

Supposons, en effet, que l'axe de la lunette ait une inclinaison $i' = ZZ'$; le grand cercle décrit par la ligne de visée et passant par

Fig. 43.



l'objet B sera Z'B; sa trace horizontale sera bZb'; la distance zénithale vraie sera $ZB = z$; la distance zénithale donnée par le théodolite sera $Z'B = z'$. L'arc ZZ' étant perpendiculaire à Z'B, le triangle rectangle ZZ'B donnera

$$B = \frac{i'}{\sin z} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} z' = \operatorname{tang} z \cos B.$$

Or, en réduisant $z - z'$ en série, on a, par le premier terme,

$$z - z' = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B \sin 2z \ldots = \frac{1}{4} \frac{i'^2}{\sin^2 z} \times 2 \sin z \cos z = \frac{1}{2} \frac{i'^2}{\operatorname{tang} z}.$$

On aurait pareillement, pour l'erreur de collimation c,

$$\frac{1}{2} \frac{c^2}{\operatorname{tang} z},$$

et, comme il s'agit ici de termes du second ordre de petitesse,

c'est-à-dire de carrés, le double produit est du même ordre. En le calculant, on trouverait, pour la correction due aux deux erreurs à la fois,

$$\frac{1}{2}\,\frac{i'^2+c^2}{\operatorname{tang} z}+\frac{i'c}{\sin z}.$$

Mais i et c peuvent être réduits à une dizaine de secondes ou, en parties du rayon, à

$$\frac{10}{206265},$$

quantité dont le carré est excessivement petit. En calculant pour $z=1^\circ$ la correction en secondes due à i', on trouverait

$\frac{\frac{1}{2}\overline{10}^2}{206265}\cot 1^\circ$	log 50.....	1,699
	log 206265.....	5,314
		$\overline{6},385-10$
	log cot 1°.....	1,758
		8,143
	Nombre....	0″,014

c'est-à-dire une correction tout à fait négligeable.

Retenons seulement de cette discussion que c'est surtout dans le cas où l'on a à mesurer des distances zénithales très faibles qu'il faut apporter un grand soin aux diverses rectifications de l'instrument.

Nous avons traité en détail tout ce qui se rapporte au théodolite, parce qu'il est le type de tous les instruments de mesure en Astronomie, en Géodésie, en Topographie, etc. Par exemple, la théorie de l'équatorial se ramène purement et simplement à celle du théodolite en substituant le pôle au zénith.

Méthode de la répétition.

Par une seule mesure de distance zénithale ou d'azimut, au théodolite, on n'atteindrait qu'un degré assez faible de précision, car d'une part la lecture d'un vernier ne donne que les 10″ ou, par une estime plus ou moins incertaine, les 5″, d'autre part il faut compter avec les erreurs de division, l'erreur de pointé, le résidu des erreurs instrumentales, etc. On serait donc loin d'atteindre le

but qu'on se propose s'il n'y avait, dans la multiplication et l'agencement des mesures, des ressources que nous allons étudier. Considérons d'abord les erreurs de division. En se bornant à l'arc $u' - u$ mesuré sur le limbe, si l'on désigne par ε' et ε les corrections inconnues qu'il faudrait ajouter aux lectures u' et u pour en tenir compte, l'arc véritable serait $u' - u + \varepsilon' - \varepsilon$. Supposons que par un artifice quelconque on ait mesuré, non pas l'angle proposé, mais un multiple de cet angle, par exemple vingt fois cet arc. On n'emploiera pour cela que les traits extrêmes, que nous pouvons toujours représenter par u' et u, et alors on aurait pour l'arc simple $\frac{u' - u}{20} + \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{20}$, d'où l'on voit que l'erreur relative des deux traits n'entrerait ici que pour le vingtième de sa valeur. Il y a donc là un moyen d'atténuer indéfiniment l'effet de cette erreur.

Angles horizontaux.

Pour mesurer l'angle BOC (sans figure), on amènera le vernier du cercle alidade sur une division quelconque u du cercle limbe, et on fixera l'alidade au limbe. Ensuite on fera tourner tout l'instrument jusqu'à ce que la lunette soit pointée dans la direction OB. A ce moment, le vernier marque toujours la division u, et l'ensemble des deux cercles limbe et alidade est fixé invariablement au pied de l'instrument. Pour achever la mesure de l'angle, on détache le cercle alidade, ce qui rend la lunette libre, mais non le limbe gradué, et l'on dirige la lunette sur l'objet C. On fixe alors de nouveau le cercle alidade au cercle limbe. Si alors on lisait le vernier, on aurait l'arc parcouru une première fois sur le limbe. Mais, au lieu de faire cette lecture, on recommence la même opération en prenant cette fois, pour origine de l'arc à mesurer, le point d'arrivée de la première.

A cet effet, on desserre la mâchoire qui unit le limbe au pied du théodolite, et l'on fait tourner l'instrument entier de manière à pointer sur l'objet B. On fixe alors le limbe au pied, et l'on se retrouve ainsi dans la première position, avec cette seule différence que le vernier répond, cette fois, à l'extrémité de l'arc une première fois parcouru sur le limbe. Partant de cette nouvelle origine, on mesure une seconde fois l'arc BOC, et pour cela on desserre la mâ-

choire qui unit le cercle limbe au cercle alidade; on amène la lunette sur l'objet C et on la fixe dans cette dernière position. L'arc parcouru sur le limbe depuis le premier pointé est évidemment égal au double de BOC. En continuant ces opérations, on obtiendra successivement le triple, le quadruple, etc., de cet angle. Il suffit de noter le nombre n des répétitions et de lire à la fin le vernier, qui donnera la division u'. On aura donc

$$\mathrm{BOC} = \frac{u' - u}{n},$$

expression où l'erreur relative des traits u' et u se trouve aussi divisée par n.

L'erreur de pointé qui affecterait une seule mesure n'est pas réduite dans la même proportion; nous verrons plus tard que, si l'on désigne par η l'erreur probable qui dépend de l'incertitude propre au pointé, l'angle conclu par la moyenne de n mesures se réduit seulement à

$$\frac{\eta}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, si l'on a mesuré un angle par vingt-cinq répétitions, l'erreur de division des deux seuls traits employés, à savoir le premier et le dernier, se trouvera divisée par 25, et l'erreur de pointé par 5.

La seule condition instrumentale à laquelle cette méthode si puissante doive satisfaire, c'est que l'instrument ne se dérange pas lorsqu'on passe de la première mesure à la deuxième, de la deuxième à la troisième, etc., c'est-à-dire qu'en déplaçant tout ensemble le cercle alidade et le cercle limbe, solidement reliés par une mâchoire, pour recommencer la mesure de l'angle BOC, le vernier de l'un ne glisse pas sur la division de l'autre. En d'autres termes, il faut que le point d'arrivée de la première mesure soit bien le point de départ de la seconde.

Le théodolite, tel que nous l'avons décrit, ne se prêterait pas à ces diverses manœuvres, parce que le cercle horizontal gradué fait corps avec le pied. Il faut que ce limbe puisse être, à volonté, rendu libre ou fixé au pied. De là un mode de construction spécial pour les instruments répétiteurs. Il consiste en ce que le limbe est porté par l'axe lui-même, tandis que le cercle alidade est soudé à

une douille additionnelle qui s'emboîte sur la partie supérieure de l'axe. Le pied ne porte plus aucun cercle, mais seulement un bras muni d'une mâchoire auquel on fixe à volonté le cercle limbe, et par suite l'axe de l'instrument, tandis que la douille supérieure portant le châssis de la lunette et le cercle alidade tourne librement, à moins qu'on ne vienne à le fixer au cercle limbe par une seconde mâchoire. La *fig.* 34 de la page 89 fera comprendre cette disposition.

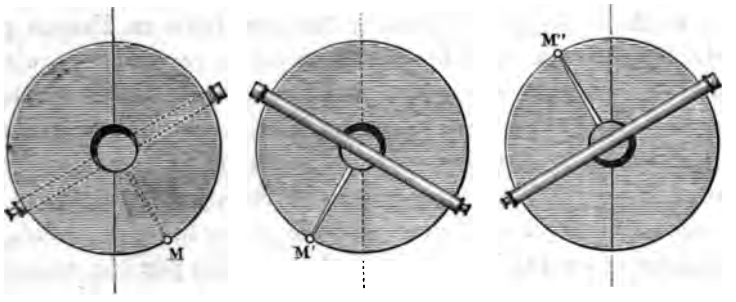
Angles verticaux.

On opère de même pour les angles verticaux; par conséquent, la partie supérieure de l'instrument, c'est-à-dire son axe de rotation horizontal, le cercle limbe et le cercle alidade doivent être disposés de manière à permettre la répétition. C'est ici l'angle double $2z$, qu'on obtient par une seule mesure à l'aide du retournement. Si l'on prend pour origine de la deuxième le point d'arrivée de la première, la deuxième mesure donnera $4z$, et ainsi de suite. Au bout de vingt-cinq répétitions, l'arc parcouru $u' - u$ devra être divisé par 50, ce qui rend cinquante fois moindre l'erreur de la graduation et dix fois moindre l'erreur du pointé. On comprend comment, par ce procédé remarquable, on obtient, à quelques dixièmes de seconde près, des angles qu'on ne mesurerait qu'à 5″ ou 6″ par une seule opération. Ici, comme pour les angles horizontaux, la seule condition instrumentale est que le point de départ d'une mesure soit bien le point d'arrivée de la précédente. Pour cela il faudrait qu'en faisant mouvoir la lunette avec les deux cercles pour passer d'une mesure à la suivante cet ensemble fût bien invariable. Or, dans ce mouvement où l'on met en jeu l'inertie de masses assez notables, il est bien difficile que les axes et leurs douilles, dont le contact n'est pas parfait, ne se déplacent pas. Quand il s'agit de la mesure des angles horizontaux, on évite cet inconvénient en opérant avec précaution, parce que les forces extérieures (la gravité) dont on ne dispose pas agissent de la même manière sur toutes les parties, et que la rotation imprimée au théodolite a lieu autour d'un axe vertical. Mais, pour les angles verticaux, il n'en est plus de même quand on fait tourner l'appareil autour de l'axe horizontal.

Les trois figures ci-jointes présentent les positions de l'instrument

lorsqu'on passe de la fin d'une mesure au commencement de la suivante. Dans la première, l'axe repose sur la douille par sa partie inférieure. Il est alors fixé au limbe par la mâchoire M. Pour

Fig. 44.



recommencer, il faut faire tourner l'instrument de 180° autour de la verticale et l'amener dans une position symétrique. Rien n'est changé par là, car la pesanteur agit encore de même, et l'axe repose encore par le même point dans sa douille. Lorsqu'on veut procéder à la mesure suivante sans toucher aux verniers, il faut faire tourner tout l'appareil autour de l'horizontale pour amener la lunette dans la direction de l'objet. Mais, dans cette dernière position, l'axe n'est plus soutenu par la douille; il tend à tomber pour la toucher par sa partie inférieure, en tournant autour de la mâchoire qui se trouve alors en M''.

Si celle-ci ne cède pas, l'élasticité des pièces se prête pourtant à ce petit jeu; l'axe se déplace légèrement, entraînant avec lui la lunette. Celle-ci tourne donc d'un très petit angle autour de M'', angle que les verniers permettraient de lire sur le limbe, s'il n'était à la limite même de la précision fournie par les verniers. Toujours est-il que le point de départ de la nouvelle mesure n'est plus rigoureusement le même que le point d'arrivée de la précédente et que la condition essentielle de la répétition ne se trouve pas réalisée. Comme le même défaut se reproduit à chaque mesure nouvelle, dans le même sens, si l'on désigne sa grandeur par α, l'angle répété n fois est vicié de la quantité $n\alpha$, en sorte qu'en divisant par n on se trouve avoir introduit l'erreur entière α dans le résultat final.

Il est bien remarquable que chaque mesure isolée obtenue par

simple retournement soit indépendante de toute erreur de ce genre. Que l'axe ballotte dans sa douille, peu importe, si l'on a recours à deux verniers opposés. Dans la répétition, au contraire, le jeu des axes ne saurait être annulé que si l'on avait, pour fixer le cercle alidade au cercle limbe, deux mâchoires opposées.

La méthode de la répétition a été introduite en France par Borda. On s'en est servi longtemps avant de reconnaître qu'elle donne, pour chaque instrument, des distances zénithales affectées d'une même erreur α dans un même sens, erreur qui va en augmentant avec le temps, à mesure que le jeu des axes augmente par l'usure. Lorsqu'on eut découvert cette erreur, on se crut obligé de renoncer à cette merveilleuse méthode et on lui a substitué, en Allemagne et en Russie, une méthode bien plus pénible, mais qui échappe au vice que nous venons de signaler.

Méthode de la réitération.

Nous venons de voir que la mesure simple d'un angle est indépendante du jeu des axes, pourvu qu'on emploie des verniers opposés ou équidistants, et qu'on lise le niveau dans chaque position quand il s'agit d'angles verticaux. Si l'on recommençait n fois la même mesure avec les mêmes traits, on rendrait l'erreur de pointé $\sqrt{n}$ fois plus petite, mais l'erreur relative des deux divisions employées resterait en entier. Pour atténuer celle-ci, sans répétition, voici comment on opère. Soient m le nombre des verniers équidistants, et par conséquent $\frac{360^\circ}{m}$ l'arc compris entre deux verniers consécutifs. Désignons de plus par n le nombre des mesures qu'on veut faire du même angle. On prendra successivement pour origine les divisions u (celle-ci est arbitraire), $u + \frac{360^\circ}{mn}$, $u + 2\frac{360^\circ}{mn}$, $u + 3\frac{360^\circ}{mn}, \ldots, u + (n-1)\frac{360^\circ}{mn}$, on mesurera chaque fois le même angle par le procédé ordinaire en lisant à chaque opération les n verniers dont la somme doit être naturellement divisée par n. Les n mesures distinctes sont affectées des erreurs de division des traits employés; mais, en prenant la moyenne de ces n mesures, le résultat final ne sera plus affecté que des termes éloi-

gnés de la série qui représente ces erreurs, ceux dont l'indice de multiplicité est divisible par *mn*. En effet, ce résultat final est précisément ce qu'on aurait obtenu si, au lieu d'employer *m* verniers équidistants, on en avait mis le nombre *mn* tout autour du cercle. On a donc éliminé ainsi la plus grande partie des erreurs systématiques de la division, et réduit notablement l'effet des erreurs accidentelles du pointé.

Mais ce moyen est très pénible. Dans le cas de vingt-cinq répétitions et de deux verniers, nous avions en tout quatre lectures à faire, deux au commencement et deux à la fin; quand il s'agit de vingt-cinq réitérations, il y a cinquante verniers à lire. Il y faut donc beaucoup plus de temps et de peine.

Aussi pensons-nous qu'il conviendrait de revenir à la répétition. Pour la rendre irréprochable, il suffirait de fixer le cercle alidade au cercle limbe par deux mâchoires opposées. A la vérité, on ne pourrait plus se servir de la vis de rappel des mâchoires pour le pointé exact; mais on y suppléerait aisément en introduisant dans le réticule un fil mobile qu'on amènerait sur l'objet au moyen d'une vis micrométrique. Nous verrons plus loin les détails de ce petit appareil, qui permet de donner une très grande précision au pointé.

Lunette de repère.

Ajoutons, pour terminer, que tout théodolite doit être muni d'une lunette de repère, portée par le pied même de l'instrument et représentée, en coupe, sur la *fig.* 34, au-dessous du limbe horizontal. Avant de commencer la mesure des angles horizontaux, on dirige cette lunette sur un signal éloigné et on la fixe au trépied du théodolite par une mâchoire spéciale. Si le pied ou le pilier de l'instrument venait à se déranger, par torsion ou autrement, on en serait averti par le dépointement de cette lunette, et on y remédierait en faisant tourner la douille qui porte le limbe horizontal du petit angle nécessaire pour ramener la lunette sur le signal, à l'aide d'une vis de rappel placée à la partie inférieure de l'instrument.

CHAPITRE V.

THÉORIE DE LA RÉFRACTION ATMOSPHÉRIQUE.

Ainsi, avec un instrument bien construit, une bonne lunette et une méthode correcte, on parvient à mesurer les coordonnées zénithales d'un astre ou d'un objet terrestre avec la précision d'une fraction de seconde. Mais nous voyons les objets à travers l'atmosphère dont notre globe est entouré; cette atmosphère réfracte les rayons lumineux qui la traversent et altère la direction dans laquelle nous voyons les objets. Quand il s'agit des astres, c'est l'atmosphère tout entière qui intervient; dans le cas des objets terrestres, elle n'agit sur le rayon visuel que par ses couches les plus basses. De là la distinction qu'il convient d'établir entre la réfraction astronomique, dont nous allons nous occuper, et la réfraction géodésique, que nous traiterons plus tard.

La réfraction est un point faible en Astronomie. Pour la calculer exactement, il faudrait connaître la constitution de l'atmosphère, ou du moins la succession des indices de réfraction des couches que le rayon de lumière traverse sous des incidences variées. Dans l'ignorance où nous sommes à cet égard, on en est réduit à recourir à des hypothèses plus ou moins voisines de la réalité; heureusement, le pouvoir réfringent de l'air dans les basses régions est très faible, il va en décroissant avec la hauteur, en sorte que les réfractions que nous aurons à calculer seront toujours très petites, et nous verrons qu'on les obtient avec une approximation suffisante dans tous les cas où il y a intérêt réel à les déterminer.

Si l'atmosphère était en équilibre, la densité de l'air, de plus en plus pressé par les couches supérieures, irait en croissant régulièrement jusqu'au sol. Pour appliquer l'analyse à cet état, il suffit de se représenter l'enveloppe aérienne comme formée de couches con-

centriques au globe terrestre, couches homogènes dans toute leur étendue, mais dont la densité décroît de couche en couche à mesure qu'on s'élève au-dessus du sol. L'indice de réfraction de chacune d'elles varie depuis la surface libre de l'atmosphère, où il se réduit à 1, comme dans le vide, jusqu'à la couche inférieure, où il est 1,000294, du moins à la température 0° et à la pression de 760^{mm}.

Considérons un rayon venant de l'espace interplanétaire où règne le vide et pénétrant dans notre atmosphère; si par ce rayon et le centre de la Terre on imagine un plan, ce plan coupera normalement toutes les couches d'air successives. Le rayon réfracté par la première couche ne sortira donc pas de ce plan; il en sera de même au passage de la première couche à la deuxième, et ainsi de suite jusqu'au sol. Ainsi la réfraction n'altère pas le vertical d'un astre et ne modifie en rien son azimut. Mais, comme l'indice de réfraction va en croissant de couche en couche, à chacune de ces couches le rayon réfracté se rapprochera de la normale au point d'incidence et décrira ainsi une courbe concave vers le sol, dont le dernier élément donnera la direction dans laquelle l'astre est vu par l'observateur. Cet astre paraîtra donc un peu plus près du zénith qu'il ne le serait sans l'interposition de l'atmosphère. La réfraction aura donc pour unique effet de relever un peu chaque astre dans son vertical, d'en diminuer un peu la distance zénithale.

A la vérité l'atmosphère, soumise d'un côté à l'échauffement produit par le Soleil, de l'autre au refroidissement nocturne, ne saurait être en équilibre. Elle est en mouvement incessant; mais, comme ces mouvements mêmes ont pour but de rétablir l'équilibre, ils ne produisent, en définitive, qu'une oscillation continuelle autour de cet état d'équilibre fictif dont l'atmosphère ne s'écarte jamais beaucoup ni longtemps. Les grands mouvements dont elle est le théâtre ne répondent, en général, qu'à d'assez faibles dénivellations, en sorte que nous pourrons conserver notre hypothèse de couches isolément homogènes, concentriques, à densités croissantes, tout en avouant que la loi de ces densités doit être fort complexe et n'est pas de nature à figurer dans notre analyse. Nous la laisserons d'abord absolument indéterminée.

Un simple théorème de Physique fera comprendre que l'on puisse calculer néanmoins, en certains cas, la déviation totale subie

par le rayon lumineux en passant du vide extérieur dans la couche où l'observateur est plongé et dont il connaît l'action réfringente, par la formule

$$(l_1 - 1)\frac{b}{760}\,\frac{1}{1 + 0{,}00366\,t} \quad (^1),$$

b désignant la pression barométrique actuelle, t la température centigrade de l'air ambiant, l_1 l'indice normal, dont nous avons donné plus haut la valeur.

Soient

l_n, l_{n-1}, ... les indices de couches successives dont nous négligerons provisoirement la courbure;

I_n, I_{n-1}, ... les angles d'incidence d'un rayon lumineux qui les traverse;

R_n, R_{n-1}, ... les angles de réfraction.

Nous aurons

$$\frac{\sin I_n}{\sin R_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n},$$

$$\frac{\sin I_{n-1}}{\sin R_{n-1}} = \frac{l_{n-2}}{l_{n-1}},$$

et ainsi de suite, de couche en couche. Les normales à ces couches étant parallèles, puisque nous négligeons leur courbure, $R_n = I_{n-1}$, en sorte qu'on peut écrire

$$\frac{\sin I_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{l_{n-1}}{l_n},$$

ou bien encore

$$l_n \sin I_n = l_{n-1} \sin I_{n-1},$$

ou, d'une manière générale,

$$l \sin I = \text{const.}$$

dans toute l'étendue de la trajectoire.

---

(1) En réalité, c'est $l_1^2 - 1$ qui, d'après la théorie, est proportionnel à la densité, et non pas $l_1 - 1$; mais, si l'on désigne l_1 par $1 + z$,

$$l_1^2 - 1 = 2z + z^2 = 2(l_1 - 1) + z^2,$$

quantité qui ne diffère de $2(l_1 - 1)$ que du carré de $0{,}00029$; $l_1 - 1$ est donc sensiblement proportionnel à $l_1^2 - 1$ quand il s'agit de l'air.

Soient z l'angle d'incidence à la limite de l'atmosphère, là où $l = 1$, et z_1 l'angle d'incidence pour l'observateur plongé dans la couche où $l = l_1$; nous aurons

$$\sin z = l_1 \sin z_1.$$

Désignons enfin la réfraction $z - z_1$ par ρ; il viendra

$$\sin(z_1 + \rho) = l_1 \sin z_1,$$

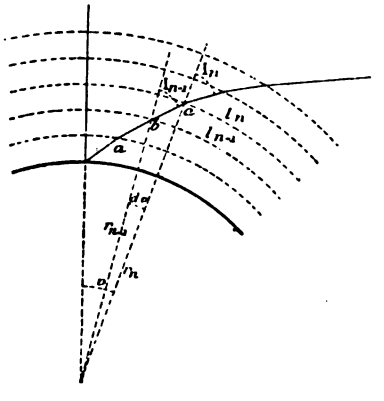
équation qui donnera ρ en fonction de la distance zénithale observée z_1, et de l'indice de la dernière couche qu'on calcule par la formule (1), et cela sans qu'on ait eu besoin de connaître la loi de succession des indices dans toute l'étendue de l'atmosphère.

Nous allons voir qu'il en est de même lorsqu'on tient compte de la sphéricité des couches, mais à la condition de ne pas pousser l'application des formules à des distances zénithales trop fortes, car alors reparaît la nécessité de tenir compte de la loi de succession des indices, autrement dit de la constitution de l'atmosphère.

Théorie de la réfraction, en tenant compte de la courbure de la Terre.

Les couches concentriques dont l'atmosphère est supposée formée

Fig. 45.



étant sphériques, la trajectoire lumineuse est située dans le vertical de l'astre, c'est-à-dire dans le plan passant par l'astre et la verticale

de l'observateur. Soient (*fig.* 45) deux éléments consécutifs *abc* de cette trajectoire, situés dans les couches dont les indices sont l_n et l_{n-1}, et dont les rayons sont r_n et r_{n-1}. La loi de la réfraction donne

$$\frac{\sin I_n}{\sin R_n} = \frac{l_{n-1}}{l_n}.$$

Le triangle bcO donne

$$\frac{\sin R_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{r_{n-1}}{r_n}.$$

Le produit de ces deux équations est

$$\frac{\sin I_n}{\sin I_{n-1}} = \frac{r_{n-1}\, l_{n-1}}{r_n\, l_n}.$$

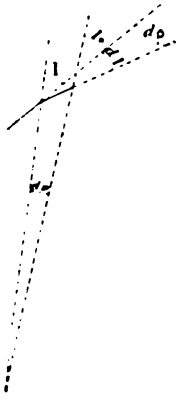
Ainsi, on a la relation générale

$$(1) \qquad r l \sin I = \text{const.},$$

identique, au facteur r près, à celle que nous avions trouvée pour le cas de couches planes et horizontales. La valeur de cette constante est $r_1 l_1 \sin z_1$, en marquant d'un indice les éléments relatifs à la couche où se trouve l'observateur.

Désignons par ρ la réfraction, c'est-à-dire l'angle compris entre les tangentes extrêmes de la trajectoire, et par $d\rho$ l'angle de deux

Fig. 46.



tangentes infiniment voisines. Rapportons enfin cette trajectoire à des coordonnées polaires r et v, en prenant pour pôle le centre

de la Terre et pour axe la verticale de l'observateur. I sera l'angle de la tangente en un point quelconque avec le rayon vecteur; par suite, on aura les relations générales

$$(2) \qquad d\rho = dI + dv \quad (\text{voir } fig.\ 46),$$

$$(3) \qquad \frac{r\,dv}{dr} = \operatorname{tang} I.$$

Pour la question actuelle, il faut ajouter à ces équations la différentielle de l'équation (1), particulière aux réfractions atmosphériques. On a, en différentiant les logarithmes des deux membres,

$$(4) \qquad \frac{dr}{r} + \frac{dl}{l} + \frac{dI}{\operatorname{tang} I} = 0.$$

Éliminons r et v entre (2), (3), (4); on a

$$(5) \qquad d\rho = -\frac{dl}{l} \operatorname{tang} I$$

ou, en mettant pour tang I sa valeur tirée de (1),

$$(6) \qquad d\rho = -\frac{dl}{l} \frac{\frac{r_1 l_1}{rl} \sin z_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_1 l_1}{rl} \sin z_1\right)^2}}.$$

C'est l'équation différentielle de la réfraction. Pour l'intégrer complètement entre les limites de l'atmosphère, c'est-à-dire entre $l = 1$ et $l = l_1$, il faudrait éliminer la variable r à l'aide d'une relation entre l et r; en d'autres termes, il faudrait connaître la loi de constitution de l'atmosphère.

Expression complète de la réfraction en termes finis.

Admettons la loi hypothétique

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^m, \quad \text{d'où} \quad \frac{r_1 l_1}{rl} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^{m-1}.$$

Posons $\left(\frac{l}{l_1}\right)^{m-1} \sin z_1 = y$, et, par suite $(m-1)\frac{dl}{l} = \frac{dy}{y}$; l'équa-

tion différentielle deviendra

$$(m-1)\,d\rho = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

dont l'intégrale est

$$(m-1)\rho = \arccos y + \text{const.}$$

En la prenant de $l = l_1$ jusqu'à $l = 1$, c'est-à-dire dans toute l'étendue de l'atmosphère, ce qui revient aux limites $y = \sin z_1$ et $y = \frac{1}{l_1^{m-1}}\sin z_1$, nous aurons

$$(m-1)\rho = \text{arc}\left(\cos = \frac{1}{l_1^{m-1}}\sin z_1\right) - \text{arc}(\cos = \sin z_1).$$

Le dernier terme est $90^\circ - z_1$. Faisons-le passer dans le premier membre et prenons les cosinus des deux membres :

$$\sin[z_1 - (m-1)\rho] = \frac{1}{l_1^{m-1}}\sin z_1.$$

Pour la mettre sous une forme plus commode, ajoutons et retranchons $\sin z_1$ aux deux membres ; on aura, après quelques réductions connues,

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}(m-1)\rho = \frac{l_1^{m-1}-1}{l_1^{m-1}+1}\,\text{tang}[z_1 - \tfrac{1}{2}(m-1)\rho].$$

En posant $l_1 = 1 + \alpha$, que l'on prenne les deux premiers termes du développement de $(1+\alpha)^{m-1}$ et que l'on remplace la tangente du petit arc $\frac{1}{2}(m-1)\rho$ par l'arc, il vient

$$\rho = \alpha\,\text{tang}\left(z_1 - \frac{m-1}{2}\rho\right);$$

α, exprimé en secondes, est $0{,}000294 \times 206265'' = 60'',64$. Quant à la constante m, on la détermine expérimentalement. Pour $z_1 = 85^\circ$, l'observation donne $\rho = 617'',7$. On a donc

$$617'',7 = 60'',64\,\text{tang}\left(85^\circ - \frac{m-1}{2}\,617'',7\right).$$

On en tire $\frac{m-1}{2} = 3{,}54$, d'où $m = 8{,}1$ ou 8 en nombre rond.

Laplace a remarqué que l'hypothèse de Bouguer, dont nous

venons de nous servir pour intégrer l'équation (6), donne un décroissement trop rapide de la température des couches successives; il a cherché une autre hypothèse qui reproduisît mieux la variation réelle, et se prêtât en même temps à l'intégration de (6) en termes finis. Il a obtenu ainsi

$$\rho = 2790'',16(0,75479 - 0,49042\,T^2)\sin z_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-T^2} \int_T^\infty e^{-t^2}\,dt$$
$$+ 10021'',34 \sin 2z_1,$$

dans laquelle $T = 25,962 \cos z_1$. C'est cette formule qu'on emploie en France. En Angleterre Ivory, en Allemagne Bessel ont employé d'autres lois et ont obtenu d'autres formules pour la réfraction. Il est très remarquable que toutes ces formules, y compris celle que nous venons de développer d'après l'hypothèse de Bouguer, donnent sensiblement les mêmes valeurs pour la réfraction jusqu'à 79° ou 80° de distance zénithale. C'est seulement dans les dix derniers degrés, de 80° à 90°, qu'elles cessent de s'accorder. Il faut conclure de cette circonstance remarquable que, jusqu'à 79°, les réfractions astronomiques sont sensiblement indépendantes de la constitution de l'atmosphère, c'est-à-dire de la loi suivant laquelle la densité varie de couche en couche, en sorte qu'il suffit, pour être en état de calculer ces réfractions, de connaître la densité ou l'indice de la dernière couche, celle où se trouve l'observateur.

Développement en série de l'expression de la réfraction.

Nous allons voir, en effet, qu'on peut intégrer l'équation (6), dans certaines limites, sans connaître cette loi, en profitant de ce que r et l ne varient, dans toute l'étendue de l'atmosphère, que de quantités fort petites.

Posons $\frac{r_1}{r} = 1 - s$, $\frac{l_1}{l} = 1 + \alpha$, d'où $-\frac{dl}{l} = \frac{d\alpha}{1+\alpha}$, s et α étant de très petites fractions dont les puissances supérieures et les produits sont négligeables.

Portons ces valeurs dans l'équation différentielle (6); il viendra, en négligeant s^2, α^2,

$$d\rho = \frac{(1-s)\,d\alpha \sin z_1}{\sqrt{1-(1-2s)(1+2\alpha)\sin^2 z_1}}.$$

Le dénominateur se réduit à

$$\sqrt{\cos^2 z_1 + 2(s - \alpha)\sin^2 z_1},$$

en négligeant $s\alpha$. Si l'on divise les deux termes de $d\rho$ par $\cos z_1$, et qu'on développe en série le radical, on aura

$$d\rho = (1 - s)\, d\alpha \operatorname{tang} z_1 - (1 - \alpha)(1 - s)\, d\alpha \operatorname{tang}^3 z_1 + \ldots.$$

Il est aisé d'intégrer $d\alpha$ et $\alpha\, d\alpha$. Quant à $\int s\, d\alpha$, Laplace a prouvé qu'elle est indépendante de la constitution de l'atmosphère et il en assigne la valeur. Sans entrer dans cette discussion qui serait un peu longue, il nous suffira de constater que sa valeur est minime; dès lors nous l'obtiendrons sans erreur sensible en y appliquant une hypothèse sur la constitution de l'atmosphère dont nous avons déjà vérifié la suffisante approximation. Posons donc

$$\frac{r_1}{r} \text{ ou } (1 - s) = \left(\frac{l}{l_1}\right)^m = \frac{1}{(1 + \alpha)^m}.$$

On en tire

$$s = m\alpha,$$

en négligeant les puissances supérieures de la très petite quantité α. Dès lors l'intégrale de la série précédente, prise de o à α, sera

$$\rho = \left(\alpha - \frac{m}{2}\alpha^2\right) \operatorname{tang} z_1 - \frac{m - 1}{2}\alpha^2 \operatorname{tang}^3 z_1 + \ldots.$$

En donnant à α la valeur $l_1 - 1 = 0,000294$ et à m la valeur 8, on trouve, après avoir multiplié les deux termes par $206265''$ pour réduire en secondes,

$$\rho = 60'',61 \operatorname{tang} z_1 - 0'',057 \operatorname{tang}^3 z_1.$$

Mais cette expression, qui représente très bien les réfractions jusqu'à $z_1 = 79°$, commence plus loin à être en défaut et n'a plus de sens à l'horizon pour $z_1 = 90°$. Cette formule suppose seulement que les couches dont l'atmosphère est composée sont parallèles les unes aux autres, c'est-à-dire concentriques et sphériques. La même supposition se retrouve au fond de toutes les théories de la réfraction, et, comme ces théories représentent le phénomène que nous étudions d'une manière satisfaisante, aussi bien dans les régions équatoriales et les contrées polaires que dans la zone tem-

pérée, il faut en conclure que les grands mouvements réguliers de l'atmosphère, origine de tous les phénomènes météorologiques, s'opèrent parallèlement au sol, sans troubler essentiellement la concentricité des couches aériennes.

Quant aux diverses lois que les géomètres ont proposées pour le calcul de la réfraction à partir de 80° de distance zénithale, elles sont toutes plus ou moins inexactes. La meilleure est celle de Laplace, qui a pris pour base un décroissement régulier de 1° du thermomètre pour chaque accroissement de 173^m dans la hauteur, nombres fournis par une mémorable ascension en ballon de Gay-Lussac. La loi imaginée par Bessel est loin de satisfaire à ces observations, regardées à juste titre comme fondamentales. Toutefois nous savons aujourd'hui que la variation de la température ne suit pas toujours la marche régulière qu'on avait d'abord supposée. Au-dessus des aires de haute pression, par exemple, la température va d'abord en croissant avec la hauteur au lieu de diminuer. Ainsi, pendant le rude hiver de 1879-1880, lorsque le thermomètre marquait —15° à Clermont-Ferrand, il s'élevait à + 3° au sommet du Puy-de-Dôme, 1100^m plus haut, au lieu de — 21° qu'il aurait dû marquer d'après les anciennes idées.

On ne peut donc compter sur l'exactitude des réfractions calculées d'après une formule quelconque au delà de 79°. L'incertitude, qui va déjà à ± 2″ vers 85°, atteint 30″ ou 40″ à l'horizon. Heureusement la région importante pour les astronomes s'étend du zénith à 80°, et c'est celle pour laquelle la réfraction se calcule indépendamment de toute hypothèse. Au delà, les images des astres deviennent trop ondulantes pour se prêter à une observation bien exacte. En outre, la dispersion atmosphérique devient sensible; elle transforme l'image de chaque étoile en un spectre allongé, ce qui détruit absolument la certitude du pointé.

Table des réfractions.

La Table suivante a été calculée, pour $t = 0°$ et $b = 760^{mm}$, par la formule

$$\rho = 60'',61 \operatorname{tang} z_1 - 0'',057 \operatorname{tang}^3 z_1,$$

jusqu'à 79°. De 79° à 90°, on s'est servi de la formule complète de

Laplace. On y a joint une Table additionnelle donnant les facteurs barométriques et thermométriques par lesquels il faut multiplier la réfraction tabulaire pour avoir celle qui répond à l'état actuel de l'atmosphère.

Table des réfractions moyennes (1), *suivant Laplace.*

z.	Réfraction.	z.	Réfraction.	z.	Réfraction.
0°	0′. 0″,0	30°	0′.33″,7	60°	1′.40″,7
1	0. 1,0	31	0.35,0	61	1.44,8
2	0. 2,0	32	0.36,4	62	1.49,3
3	0. 3,1	33	0.37,9	63	1.54,0
4	0. 4,1	34	0.39,3	64	1.59,0
5	0. 5,1	35	0.40,8	65	2. 4,4
6	0. 6,1	36	0.42,3	66	2.10,3
7	0. 7,2	37	0.43,9	67	2.16,6
8	0. 8,2	38	0.45,5	68	2.23,4
9	0. 9,2	39	0.47,2	69	2.30,8
10	0.10,3	40	0.48,9	70	2.38,9
11	0.11,3	41	0.50,7	71	2.47,8
12	0.12,4	42	0.52,5	72	2.57,7
13	0.13,5	43	0.54,3	73	3. 8,6
14	0.14,5	44	0.56,3	74	3.20,8
15	0.15,6	45	0.58,3	75	3.34,5
16	0.16,7	46	1. 0,3	76	3.50,0
17	0.17,8	47	1. 2,5	77	4. 7,7
18	0.18,9	48	1. 4,7	78	4.28,1
19	0.20,1	49	1. 7,0	79	4.51,9
20	0.21,2	50	1. 9,4	80	5.20,0
21	0.22,4	51	1.11,9	81	5.53,7
22	0.23,6	52	1.14,5	82	6.34,7
23	0.24,8	53	1.17,2	83	7.25,6
24	0.26,0	54	1.20,1	84	8.30,3
25	0.27,2	55	1.23,1	85	9.54,8
26	0.28,4	56	1.26,3	86	11.48,8
27	0.29,7	57	1.29,6	87	14.28,7
28	0.31,0	58	1.33,1	88	18.23,1
29	0.32,3	59	1.36,8	89	24.22,3
30	0.33,7	60	1.40,7	90	33.47,9

(1) En réalité, ces réfractions répondent, non à $t = 0°$, mais à $t = 10°$. On les a calculées ainsi pour les géographes et les marins, qui n'ont pas besoin d'une très grande précision et qui négligent le plus souvent les corrections relatives au thermomètre et au baromètre.

Table des corrections.

Hauteur barométrique.				Température.			
Baromètre.	Facteur.	Baromètre.	Facteur.	Thermomètre.	Facteur.	Thermomètre.	Facteur.
mm		mm		°		°	
720...	0,947	745...	0,980	—10...	1,080	+15...	0,982
721...	0,949	746...	0,982	— 9...	1,076	+16...	0,978
722...	0,950	747...	0,983	— 8...	1,071	+17...	0,975
723...	0,951	748...	0,984	— 7...	1,067	+18...	0,971
724...	0,953	749...	0,986	— 6...	1,063	+19...	0,968
725...	0,954	750...	0,987	— 5...	1,059	+20...	0,964
726...	0,955	751...	0,988	— 4...	1,055	+21...	0,961
727...	0,957	752...	0,989	— 3...	1,051	+22...	0,957
728...	0,958	753...	0,991	— 2...	1,047	+23...	0,954
729...	0,959	754...	0,992	— 1...	1,043	+24...	0,950
730...	0,961	755...	0,993	0...	1,039	+25...	0,947
731...	0,962	756...	0,995	+ 1...	1,035	+26...	0,944
732...	0,963	757...	0,996	+ 2...	1,031	+27...	0,940
733...	0,964	758...	0,997	+ 3...	1,027	+28...	0,937
734...	0,966	759...	0,999	+ 4...	1,023	+29...	0,934
735...	0,967	760...	1,000	+ 5...	1,019	+30...	0,931
736...	0,968	761...	1,001	+ 6...	1,015	+31...	0,927
737...	0,970	762...	1,003	+ 7...	1,011	+32...	0,924
738...	0,971	763...	1,004	+ 8...	1,007	+33...	0,921
739...	0,972	764...	1,005	+ 9...	1,004	+34...	0,918
740...	0,974	765...	1,007	+10...	1,000	+35...	0,915
741...	0,975	766...	1,008	+11...	0,996	+36...	0,912
742...	0,976	767...	1,009	+12...	0,993	+37...	0,908
743...	0,978	768...	1,011	+13...	0,989	+38...	0,905
744...	0,979	769...	1,012	+14...	0,985	+39...	0,902
745...	0,980	770...	1,013	+15...	0,982	+40...	0,899

Voici un exemple de ce genre de calcul. *On a observé une étoile par* 71°40′10″,0 *de distance zénithale apparente; le baromètre (réduit à* 0°) *marquait* 770^{mm} *et le thermomètre extérieur* —5°,0 : *on demande la distance zénithale vraie.*

La Table donne pour 71°....	2′.47″,8
Variation pour 40′,2.....	0. 6,6
Réfraction tabulaire.....	2.54,4 = 174″,4
Facteur barométrique.....	1,013
Facteur thermométrique.....	1,059
Produit.....	1,073

$$174'',4 \times 1,073 = 187'',1$$

Distance zénithale apparente....	71°.40'.10'',0
Réfraction.....	0. 3. 7,1
Distance zénithale vraie.....	71.43.17,1

On ne tient nul compte de l'état hygrométrique, quoique la vapeur d'eau ait un indice un peu plus fort que celui de l'air qu'elle remplace; mais, comme sa densité est moindre, il se trouve qu'il y a compensation.

CHAPITRE VI.

DÉTERMINATION ASTRONOMIQUE DES COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES D'UN LIEU.

Ces coordonnées sont λ et L. Comme $L = H - H_p$, il faut aussi déterminer l'heure H du lieu. Quant à H_p, heure de Paris au même instant, nous la supposerons connue.

Il ne suffit ni au marin ni au géographe d'obtenir les coordonnées de la station : il leur faut encore s'orienter, c'est-à-dire déterminer avec plus ou moins d'exactitude la direction du méridien, origine des azimuts des signaux terrestres qu'il aura à mesurer. Les instruments dont l'observateur aura besoin sont un théodolite placé et bien rectifié sur un pilier en pierre, un baromètre et un thermomètre pour le calcul des réfractions, enfin une pendule sidérale battant à peu près 86 400^s par jour sidéral. Il lui faut, en outre, la *Connaissance des Temps*, éphéméride publiée chaque année par le Bureau des Longitudes, pour y prendre à vue les coordonnées uranographiques des étoiles dont il se servira.

La première chose à faire est de reconnaître les astres qu'il convient d'observer. Ces étoiles ont des noms propres qui sont marqués sur les Cartes célestes et dont on se sert dans les éphémérides. Pour se familiariser avec ces détails, on commence par chercher la constellation de la Grande Ourse, toujours visible sous nos climats. Sur l'alignement des étoiles α et β de cette constellation, à cinq fois environ l'arc $\alpha\beta$, se trouve α de la Petite Ourse, ou la Polaire. De là, à l'aide d'une Carte céleste, et par des alignements indiqués sur cette Carte, on retrouve, de proche en proche, les principales étoiles dont il faut se rappeler les noms et parmi lesquelles nous aurons tout à l'heure à faire un choix.

Le second point dont l'observateur devra se préoccuper, ce sera

d'obtenir rapidement des valeurs approchées des éléments qu'il se propose de déterminer plus tard avec précision, c'est-à-dire de l'heure, de la colatitude, de la direction du méridien.

Méthode des hauteurs correspondantes.

La direction du méridien étant grossièrement indiquée par celle de l'étoile polaire, l'observateur choisira, à l'est de ce plan, une étoile qui en soit peu éloignée. Il dirigera la lunette sur cette étoile et, au moment du pointé, il notera l'heure h de la pendule. L'instrument étant fixé dans cette position, il lira la direction azimutale u sur le cercle horizontal. Quant au cercle vertical, il suffit que les mâchoires soient serrées. Puis il attendra que l'étoile ait passé de l'autre côté du méridien et revienne à la même hauteur. Pour cela, il la suivra par le mouvement azimutal seulement de la lunette, sans déplacer celle-ci sur son propre limbe. Lorsque l'étoile aura atteint de nouveau la croisée des fils, il notera l'heure h' de la pendule, fixera l'instrument en azimut et lira de nouveau les verniers.

Soit u' cette seconde lecture. Comme le méridien du lieu est un plan de symétrie pour tous les phénomènes du mouvement diurne, $\frac{u'+u}{2}$ sera, sur le limbe horizontal, la direction du méridien ; $\frac{h+h'}{2}$ sera l'heure du passage de l'étoile par ce plan. L'étoile étant connue, on en prendra l'ascension droite Æ pour la date de l'observation dans la *Connaissance des Temps*, et, comme Æ en temps donne précisément l'heure sidérale du passage de l'étoile au méridien, on aura

$$Æ - \frac{h+h'}{2} = \varepsilon$$

pour le retard de l'horloge ; ε sera la correction à ajouter à toutes les indications de cette horloge pour avoir l'heure sidérale.

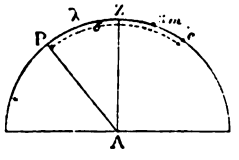
Cela fait, on amènera le cercle vertical dans la direction du méridien $\left(\text{le vernier marquant } \frac{u'+u}{2}\right)$ et on y attendra le passage d'une étoile connue. On en mesurera la distance zénithale méridienne z_m, et, à l'aide du δ de cette étoile pris dans la *Connais-*

sance des Temps, on aura la colatitude λ par

$$\delta = \lambda + z_m,$$

formule où l'on donnera à z_m le signe + ou le signe — selon que l'étoile se trouvera au sud ou au nord du zénith, et à δ le signe $\pm$ selon que l'étoile se trouvera au-dessus ou au-dessous du pôle. La figure ci-jointe en rendra aisément compte.

Fig. 47.



Circonstances favorables à la détermination exacte de l'heure et de la colatitude.

Reproduisons ici les équations fondamentales de la transformation des coordonnées :

$$(1) \qquad \cos z = \cos\lambda\cos\delta + \sin\lambda\sin\delta\cos \text{Æ},$$

$$(2) \qquad \sin z\cos A = -\sin\lambda\cos\delta + \cos\lambda\sin\delta\cos \text{Æ},$$

$$(3) \qquad \sin z\sin A = \sin\delta\sin \text{Æ}.$$

Avec le théodolite, à un instant donné par la pendule, on mesure le z d'une étoile dont les coordonnées uranographiques Æ et δ sont connues; on en déduit, par l'équation (1), soit λ, soit Æ, et par conséquent H. Comme l'observateur est maître du choix de l'étoile et de l'instant de l'observation, il doit, avant tout, se préoccuper de choisir les circonstances favorables à l'exacte détermination des inconnues. Différentions l'équation (1) par rapport à z, λ et Æ. Quant à δ et Æ, ce sont des données d'une très grande exactitude qui résultent des observations antérieures des astronomes. Il vient ainsi

$$-\sin z\, dz = (-\sin\lambda\cos\delta + \cos\lambda\sin\delta\cos \text{Æ})\, d\lambda - \sin\lambda\sin\delta\sin \text{Æ}\, d\text{Æ}.$$

Cette relation, comparée à (2) et à (3), se réduit à

$$(4) \qquad dz = -\cos A\, d\lambda + \sin\lambda\sin A\, d\text{Æ}.$$

S'il s'agit de déterminer l'heure, on aura

$$d\mathrm{H} = \frac{d\lambda}{\sin\lambda \operatorname{tang} \mathrm{A}} + \frac{dz}{\sin\lambda \sin \mathrm{A}}$$

(en divisant par sin A, on suppose que A n'est ni 0° ni 180°). Cette erreur sera minimum si A = 90° ou 270°; en d'autres termes, une erreur commise sur λ n'aura aucune influence sur l'heure, et une erreur sur z aura la moindre influence sur l'heure si l'étoile choisie se trouve à 90° du méridien, à l'ouest ou à l'est, c'est-à-dire près du deuxième ou du quatrième vertical.

S'il s'agit de la colatitude, on tire de (4), en divisant par cos A, ce qui suppose que A n'est ni 90° ni 270°;

$$d\lambda = \sin\lambda \operatorname{tang} \mathrm{A}\, d\mathrm{H} - \frac{dz}{\cos \mathrm{A}}.$$

Cette erreur est donc indépendante de celle de l'heure employée, et aussi peu dépendante que possible de celle de la distance zénithale, si l'on fait choix d'une étoile située dans le méridien, ou très près de ce plan.

1° *Détermination précise de l'heure.* — On a mesuré, par une double opération, aux heures très voisines h et h' de la pendule, la distance zénithale d'une étoile près du deuxième ou du quatrième vertical, h répondant à la première observation cercle à droite, h' à la seconde, cercle à gauche. On a noté en même temps les indications du niveau dans les deux positions et celles du baromètre et du thermomètre. On est donc en état d'en conclure : 1° la distance zénithale apparente z_1; 2° la distance zénithale vraie $z = z_1 + \rho$. Dès lors, (1) donnera

$$\cos \mathrm{H} = \frac{\cos z - \cos\lambda \cos\delta}{\sin\lambda \sin\delta},$$

ou, si l'on veut une formule calculable par logarithmes,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \mathrm{H} = \pm \sqrt{\frac{\sin(s-\lambda)\sin(s-\delta)}{\sin s \sin(s-z)}},$$

en posant $2s = \delta + \lambda + z$. On prendra le signe + si l'étoile observée est à l'ouest, le signe — si elle est à l'est. H ayant été calculé par

cette formule et exprimé en temps, on aura

$$\Pi = \text{Æ} + \text{Æ}.$$

Par conséquent, le retard ε de la pendule sidérale au moment de l'observation sera

$$\Pi - \frac{h + h'}{2} = \varepsilon.$$

Dans le calcul de cette formule on pourra employer une valeur approchée de λ, pourvu que l'observation ait été faite dans les conditions susdites.

Par cette manière de procéder, on admet tacitement que la distance zénithale conclue de deux opérations faites aux heures très voisines h et h' de l'horloge répond bien à la moyenne des heures $\frac{h + h'}{2}$. Cela suppose que dans ce court intervalle la variation de z est proportionnelle au temps. C'est ce qui aura lieu effectivement, d'après (4), si l'étoile a été prise à 90° à peu près du méridien, car alors on a sensiblement

$$dz = \sin\lambda \, d\text{Æ}.$$

2° *Détermination précise de la colatitude.* — Cette fois il faut choisir une étoile située très près du méridien. Soit z sa distance zénithale conclue, comme d'ordinaire, des deux observations cercle à droite et cercle à gauche, aux heures sidérales désormais connues H et H'. Supposons que z ait été dûment corrigé de la réfraction et portons-en la valeur dans (1) ; on en conclura la valeur de λ. Comme λ y figure à la fois sous les signes sinus et cosinus, le moyen qui se présente le premier à l'esprit est de recourir à des quantités auxiliaires m et φ, en posant

$$\cos\delta = m\cos\varphi,$$
$$\sin\delta\cos\text{Æ} = m\sin\varphi,$$

d'où l'on conclut m et φ, et par suite λ, par

$$\cos z = \cos(\lambda - \varphi).$$

Comme λ n'est déterminé que par le cosinus de $\lambda - \varphi$, il y aurait ambiguïté ; mais celle-ci disparaît dans la pratique, si l'observateur

a eu soin d'obtenir d'abord une valeur approchée de λ. On prendra pour $\lambda - \varphi$ l'arc qui donne à λ une valeur voisine de cette première approximation.

Cette solution est générale ; elle s'applique donc au cas où l'on a choisi une étoile dans une position quelconque. Mais, comme l'observateur a dû la choisir près du méridien, $\text{Æ}H$ est très petit et l'on en profite pour simplifier le calcul. Soit z_m la distance zénithale telle qu'on l'aurait obtenue si l'observation avait été faite dans le méridien même. Dans ce cas, on aurait λ par la formule bien simple

$$\delta - \lambda = z_m.$$

Dès lors, en remplaçant $\cos \text{Æ}H$ par $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}\text{Æ}H$ et $\delta - \lambda$ par z_m, l'équation (1) devient

$$\cos z = \cos z_m - 2\sin\lambda \sin\delta \sin^2 \tfrac{1}{2}\text{Æ}H,$$

ou encore

$$\sin \tfrac{1}{2}(z - z_m) = \frac{\sin\lambda \sin\delta}{\sin \frac{1}{2}(z + z_m)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\text{Æ}H,$$

où l'on peut remplacer le sinus du petit arc $\frac{1}{2}(z - z_m)$ par l'arc lui-même en écrivant

$$z - z_m = 206265'' \frac{2\sin\lambda \sin\delta}{\sin \frac{1}{2}(z + z_m)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\text{Æ}H.$$

Cette formule contient les inconnues λ et z_m dans le second membre ; mais, comme $\sin^2 \frac{1}{2}\text{Æ}H$ est très petit, il sera permis d'employer dans le calcul une valeur simplement approchée de λ et de remplacer $\sin \frac{1}{2}(z + z_m)$ par $\sin z$. Le petit arc $z - z_m$, qu'on en déduit en calculant à trois ou à quatre décimales seulement, se nomme *réduction au méridien ;* en l'ajoutant au z observé, on obtiendra z_m, et par suite λ. Quant à $\text{Æ}H$, angle horaire de l'étoile au moment de l'observation, on le calcule par

$$\text{H} = \text{Æ}H + \text{Æ}R,$$

l'heure H étant donnée par $\frac{h + h'}{2} + \varepsilon$, car le retard ε de la pendule a été déterminé antérieurement.

Ici se présente une remarque analogue à celle du précédent paragraphe. La distance zénithale z résulte de deux pointés exé-

cutés aux heures h et h' de la pendule : est-il permis de conclure que ce z répond bien à la moyenne des heures $\frac{h+h'}{2}$? Très près du méridien, la variation de z est, comme on le voit, proportionnelle, non plus au temps, mais au carré du temps ou à AH^2. Il faudrait donc, en toute rigueur, calculer la réduction au méridien $z - z_m$ pour les deux pointés et appliquer la moyenne de ces résultats au z observé; mais, si l'intervalle $h' - h$ des deux pointés est très petit, l'erreur résultant du premier mode est négligeable.

L'observateur ne doit pas se borner à une seule mesure de z; il multipliera ces mesures sur la même étoile, sans s'écarter beaucoup du méridien (autrement l'erreur possible de l'heure interviendrait dans les résultats), et réduira chaque observation de la même manière. L'accord de ces déterminations diverses lui permettra de juger du degré de précision obtenu pour la colatitude conclue.

Il ne suffirait pas d'observer une seule étoile; il faut en observer plusieurs, choisies dans des régions différentes du ciel, c'est-à-dire au nord et au sud. C'est même ainsi que les géodésiens ont découvert l'erreur constante introduite par la répétition dans la mesure des distances zénithales, surtout lorsque l'instrument commence à s'user. Cette erreur a pour effet, comme on l'a vu, d'altérer dans le même sens toutes les distances zénithales. Supposons celles-ci trop fortes d'une quantité α à une certaine distance du zénith : on aura, pour la colatitude conclue d'une étoile au sud,

$$\delta - (z_m + \alpha) = \lambda - \alpha,$$

et, par une étoile du nord située à pareille distance du zénith,

$$\delta' + (z'_m + \alpha) = \lambda + \alpha.$$

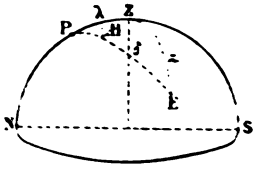
Effectivement, les cercles répétiteurs donnent en général des colatitudes différentes suivant qu'on observe au nord ou au sud. On a cherché à éliminer l'erreur en prenant la moyenne des deux résultats; mais cela suppose que les deux erreurs, au nord et au sud, sont égales, ce qui n'est nullement certain.

La méthode de la réitération est exempte de cette erreur; il faut donc recourir à cette méthode, à moins d'adopter le système que

nous avons indiqué plus haut pour faire disparaître l'erreur constante des instruments répétiteurs.

3° *Orientation.* — La colatitude et la correction de la pendule étant bien connues, il ne reste plus qu'à déterminer la direction du méridien. Pour cela on observe, à l'aide du théodolite, l'azimut provisoire (compté à partir du zéro de la division du limbe horizontal placé dans une position quelconque) d'une étoile connue. Soient u la division qui répond au vertical de l'astre à l'instant H donné par la pendule, et A l'azimut réel de cet astre à cet instant : $u - A$ sera la division à laquelle répondra le méridien (le

Fig. 48.



point sud), et, si l'on amène l'alidade sur cette division, la lunette, en tournant autour de son axe horizontal, décrira le méridien. Il ne reste donc plus qu'à calculer l'azimut que doit avoir l'étoile à l'instant H. En divisant membre à membre les équations (2) et (3), on a

$$\cot A \sin \mathcal{H} = - \sin \lambda \cot \delta + \cos \lambda \cos \mathcal{H},$$

équation analogue, sauf le signe de $\cot A$, à une catégorie d'équations des triangles sphériques. $\mathcal{H}$, λ, δ étant connus, cette relation donnera l'azimut cherché A.

Pour apprécier les conditions d'exactitude, différentions cette relation par rapport à A et à $\mathcal{H} = H - \mathcal{R}$. Il vient ainsi

$$- \frac{dA}{\sin^2 A} \sin \mathcal{H} - \cos \mathcal{H} \cot A \, d\mathcal{H} = - \cos \lambda \sin \mathcal{H} \, d\mathcal{H}.$$

On en tire, en multipliant les deux membres par $\sin A$,

$$\frac{\sin \mathcal{H}}{\sin A} dA = (\cos A \cos \mathcal{H} - \sin A \sin \mathcal{H} \cos \lambda) \, d\mathcal{H}.$$

Le facteur entre parenthèses n'est autre chose que le cosinus de l'angle E du triangle PZE.

On a, en effet, par la formule (5) de la page 60,

$$\cos E = -\cos A \cos \mathcal{H} + \sin A \sin \mathcal{H} \cos \lambda,$$

et, en observant que pour les coordonnées sphériques A est le supplément de l'angle A du triangle PZE,

$$\cos E = \cos A \cos \mathcal{H} + \sin A \sin \mathcal{H} \cos \lambda.$$

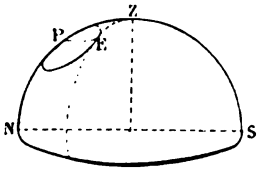
Donc

$$dA = \frac{\sin A}{\sin \mathcal{H}} \cos E \, d\mathcal{H} = \frac{\sin \delta}{\sin z} \cos E \, d\mathcal{H}.$$

L'incertitude de l'angle horaire $\mathcal{H}$ ou de l'heure H aura donc d'autant moins d'effet que l'angle E sera plus voisin de 90°.

Cet angle E, auquel on donne le nom d'*angle de position,* ne peut être droit que pour les étoiles circumpolaires. Il y aura donc tout avantage à observer une de ces étoiles dans la position E de

Fig. 49.



la figure ci-jointe, c'est-à-dire lorsque le cercle de hauteur ZE est à peu près tangent au parallèle diurne décrit par l'étoile.

En général, on mesure la différence d'azimut entre un signal éloigné et une étoile circumpolaire en notant l'heure H, et l'on ajoute à cet angle l'azimut calculé de l'étoile, à l'heure H, pour avoir l'azimut absolu du signal.

4° *Longitude.* — Maintenant que nous sommes en état de déterminer l'heure H du lieu avec une grande précision, il nous suffira de connaître l'heure de Paris H_p au même instant pour obtenir la longitude par la formule

$$L = H - H_p.$$

La détermination de H_p est un problème difficile. Il existe, pour le résoudre, trois moyens fort différents : 1° le transport de l'heure

à l'aide de chronomètres bien réglés sur l'heure de Paris avant le départ de l'observateur; 2° la transmission de l'heure de Paris par le télégraphe, partout où il existe des câbles électriques; 3° l'observation de certains phénomènes astronomiques par des méthodes qui seront exposées dans la dernière Partie.

C'est pour résoudre ce problème par la première méthode que l'horlogerie de précision a été si ardemment cultivée depuis deux siècles; c'est pour trouver en mer l'heure de Paris (ou en général du premier méridien) par la troisième méthode que la théorie de la Lune a été poussée si loin dans ces derniers temps.

EXEMPLES NUMÉRIQUES.

Détermination de l'heure.

Le 1er *avril* 1880, *à Paris, à* $7^h 2^m 15^s,0$, *temps de la pendule, on a observé Arcturus par* $z = 63°16'1'',4$ (*corrigée de la réfraction*): *déterminer l'heure sidérale, et par suite le retard absolu de la pendule.* Quelques observations préliminaires ont donné 41°10′ pour la valeur approchée de λ et $2^h 21^m$ pour le retard cherché. L'observation d'Arcturus a été faite à l'est. Les coordonnées d'Arcturus sont $AR = 14^h 10^m 14^s,16$, $\delta = 70°11'52'',7$.

Prenons la formule (1), sans aucune transformation :

$$\cos z = \cos\lambda \cos\delta + \sin\lambda \sin\delta \cos H.$$

log cos z...	9.6530510	log cos λ.....	9,8766785	log sin λ.	9.8183919
Nombre...	0,4198328	log cos δ.....	9.5299065	log sin δ.	9.9735291
2e nombre.	0.2550263	log 2e nombre.	9.4065850	3e log...	9.7919210
Diff.....	0.1948065				
log diff....	9.2896034				
3e log.....	9.7919210				
log cos H..	9.4976824				
H.....	288°20′0″,0				

	h m s
AR.....	14.10.14,16
H (en temps).....	19.13.20,00
H.....	9.23.34,16
h (pendule	7. 2.15,00
Retard.....	2.21.19,16

Ainsi il faudra ajouter à toutes les indications de la pendule $2^h 21^m 19^s,16$ pour avoir l'heure sidérale.

L'erreur de ce résultat, provenant de l'incertitude de la valeur

provisoire de λ, est donnée par

$$d\text{Æ}\text{H} = \frac{d\lambda}{\sin\lambda \tang A}.$$

L'azimut A se calcule par l'analogie des sinus :

$\log\sin\delta$.....	9,9735
$\log\sin\text{Æ}\text{H}$.....	9,9774 n
$C^t \log\sin z$.....	0,0491
$\log\sin A$	0,0000 n

L'angle A est donc de 270°; sa tangente est infinie, et par suite $d\text{Æ}\text{H}$ est nul en tant qu'il provient de $d\lambda$. Quant à l'erreur probable du retard provenant de celle de z, elle se réduit ici, puisque A est à peu près de 270°, à

$$\frac{dz}{\sin\lambda} = 1,52\, dz.$$

Si l'on a mesuré z à $1''$ près, l'heure sera déterminée à $\frac{1'',52}{15} = 0^s,1$ près.

Détermination de la colatitude par des observations circumméridiennes.

Le même jour on a observé près du méridien α du Lion (Régulus), dont les coordonnées étaient

$$\text{Æ}\text{R} = 10^h 2^m 1^s,6, \quad \delta = 77°27'2'',8.$$

On a trouvé, par la double opération du retournement,

$$\left.\begin{array}{l}\text{à } 10^h 3^m\ 0^s \\ \text{à } 10^h 5^m 14^s\end{array}\right\} z = 36°17'27'',1.$$

Les heures sont déjà corrigées du retard ci-dessus, et la distance zénithale a été corrigée de la réfraction. Ici nous donnons les heures des deux pointés au lieu de leur moyenne, comme dans l'exemple précédent, parce que la distance zénithale de l'étoile, près du méridien, ne variant plus proportionnellement au temps, mais comme le carré du temps, la moyenne des heures, dont la

différence est de plus de 2^m, ne répond plus à la demi-somme des distances zénithales. Nous calculerons la réduction au méridien pour chacune de ces heures, et c'est leur moyenne que nous appliquerons à la distance zénithale observée.

La formule exacte de cette réduction est

$$\sin\tfrac{1}{2}(z - z_m) = \frac{\sin\lambda \sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(z + z_m)} \sin^2\tfrac{1}{2}\text{Æ}.$$

On prendra pour λ et $\frac{1}{2}(z + z_m)$ les valeurs approchées $41°10'$ et $36°17'$. Voici le calcul :

H.....	10h. 3m. 0s,5	10h. 5m.14s,0	log 2.....	0,3010
Æ.....	10. 2. 1,6	10. 2. 1,6	log sin λ.....	9,8184
Æ.....	0. 0.58,4	0. 3.12,4	log sin δ.....	9,8895
½Æ en arc...	7′18″	24′3″	C^t log sin z...	0,2278
			log 206265...	5,3144
				5,5511

log const.....	5,5511	5,5511	
log sin² ½Æ...	4,6541	5,6897	
	0,2052	1,2408	
$z - z_m$.....	1″,6	17″,4	Moy. = 9″.5

z.....	36°.17′.27″,1
$z - z_m$.....	— 0.. 0. 9,5
z_m.....	36.17.17,6
δ.....	77.27. 2,8
λ.....	41. 9.45,2

Si l'on se bornait à calculer la réduction au méridien pour la moyenne des heures $10^h 4^m 7^s$, on trouverait $7'',4$, valeur sensiblement erronée.

Lorsqu'on a un assez grand nombre de mesures circumméridiennes de z à réduire, on abrégera le calcul en appliquant à la moyenne des z la correction

$$\frac{\sin\lambda \sin\delta}{\sin\frac{1}{2}(z + z_m)} \frac{\Sigma 206265'' \times 2 \sin^2\frac{1}{2}\text{Æ}}{n},$$

dont la Table suivante fournira aisément le dernier facteur :

Æ.	$206265'' \times 2 \sin^2 \frac{1}{2} Æ$.	Æ.	$206265'' \times 2 \sin^2 \frac{1}{2} Æ$.
m	"	m	"
0,00...	0,00	6,00...	70,68
0,20...	0,22	6,20...	78,75
0,40...	0,87	6,40...	87,26
1,00...	1,96	7,00...	96,20
1,20...	3,49	7,20...	105,58
1,40...	5,45	7,40...	115,40
2,00...	7,85	8,00...	125,65
2,20...	10,69	8,20...	136,34
2,40...	13,96	8,40...	147,46
3,00...	17,67	9,00...	159,02
3,20...	21,82	9,20...	171,02
3,40...	26,40	9,40...	183,46
4,00...	31,42	10,00...	196,32
4,20...	36,87	10,20...	209,62
4,40...	42,76	10,40...	223,36
5,00...	49,09	11,00...	237,54
5,20...	55,84	11,20...	252,15
5,40...	63,05	11,40...	267,20
		12,00...	282,68

Si l'on s'écarte notablement du méridien, il faudra cesser de prendre $\sin z$ pour $\sin \frac{1}{2}(z + z_m)$ et calculer les réductions une à une avec des valeurs plus approchées de ce dénominateur.

Orientation.

Soient A l'azimut de l'étoile circumpolaire observée vers l'un de ses plus grands écarts par rapport au méridien, et A' l'azimut inconnu d'un signal. Le 1er avril 1880, à $12^h 23^m 0^s$, par $41°10'$ de colatitude approchée, on a mesuré la différence d'azimut A — A' entre δ de la Petite Ourse et le signal B; on a trouvé $A - A' = 22°17'15'',2$: conclure de là l'azimut A' du signal. Les coordonnées de l'étoile étaient, à cette date :

Æ....	18h.10m.55s,14	δ....	3°.23'.47",6
H....	12.23. 0,00		
Æ....	18.12. 4,86 (1)	=	273. 1.12,9

(1) Pour retrancher ici Æ de H, on ajoute à ce dernier 24^h.

Nous emploierons les formules (2) et (3).

log cos λ	9,8767011	log sin λ	9,8183623	log sin δ	8,7726617
log cos δ	9,9992364	log sin δ	8,7726617	log sin *H*	9,9993963 *n*
log 1er terme.	9,8759375	los cos *H* . . .	8,7217191	log sin *z* sin A.	8,7720580 *n*
1er terme.	0,7515147	log 2e terme.	7,3127431	log sin *z* cos A.	9,8771232
2e terme.	0,0020547			log tang A	8,8949348 *n*
sin *z* cos A. . .	0,7535694				
				A	184°.29′.21″,06
				A — A′	22.17.15,20
				A′.	162.12. 5,86

Ainsi l'azimut du signal B est de 162°12′5″,86.

LIVRE DEUXIÈME.

GRANDS OBSERVATOIRES ASTRONOMIQUES.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les coordonnées uranographiques des astres observés étaient connues d'avance avec une précision extrême. La détermination de ces coordonnées est l'œuvre quotidienne des grands observatoires, dont nous allons décrire l'organisation et les travaux.

Cette organisation est fondée sur les deux relations suivantes. Si l'on observe une étoile au moment de son passage au méridien, la formule

$$H = \text{Æ}H + \text{Æ}R$$

se réduit à

$$H = \text{Æ}R.$$

En d'autres termes, l'heure sidérale de ce passage fait connaître l'ascension droite de cette étoile. En second lieu, la relation

$$\delta = \lambda + z_m$$

montre que, pour obtenir la seconde coordonnée uranographique δ, il suffit d'ajouter à la colatitude du lieu la distance zénithale méridienne de l'étoile.

Ces deux observations étant indépendantes l'une de l'autre, on les sépare entièrement et on y consacre deux instruments différents, tous deux employés à observer dans le méridien, l'un la lunette méridienne pour les Æ, l'autre le cercle mural pour les δ. Cette application du principe de la division du travail, si prôné dans l'industrie, permet d'étudier chaque instrument d'une manière plus approfondie et de fixer l'attention de l'observateur sur le phéno-

mène réduit à sa plus extrême simplicité. En outre, les instruments d'un observatoire ne devant pas être déplacés, on peut leur donner des dimensions bien plus considérables qu'aux instruments transportables d'un géographe ou d'un géodésien.

Les appareils nécessaires à un observatoire sont au nombre de trois : la lunette méridienne, la pendule sidérale et le cercle mural. Il suffit d'y ajouter un baromètre et un thermomètre pour les corrections dues à la réfraction.

Ces instruments sont supportés par des piliers en pierre de taille, à fondations profondes, et abrités par une salle dont les parois permettent à l'air intérieur de se mettre rapidement en équilibre de température avec l'air extérieur. Le plancher de cette salle doit être coupé autour de chaque pilier, afin que ses vibrations ne se communiquent pas aux instruments. Enfin la salle s'ouvre au-dessus de chaque instrument par une large tranchée pratiquée dans les murs et le plafond, de manière à laisser voir le ciel dans la direction du méridien. Cette tranchée se ferme, au plafond, par des trappes mobiles, et sur les murs par de longues fenêtres.

Chaque instrument a son observateur; l'un détermine les Æ à la lunette méridienne à l'aide de la pendule sidérale, l'autre les δ au cercle mural.

Ce système d'observations exclusivement méridiennes ne date pas de très loin. Il a été introduit en Astronomie par Rœmer, de l'Académie des Sciences, à qui l'on doit la découverte et la mesure de la vitesse de la lumière. Il a été adopté par le célèbre astronome Bradley vers le milieu du siècle dernier et introduit, quelques années après, à l'Observatoire de Paris par le dernier Cassini. Mais ce monument n'avait pas été construit en vue d'observations de ce genre. Il a fallu y ajouter une salle accessoire qui est devenue bientôt la partie principale de l'établissement. Nous allons décrire successivement les trois instruments dont nous venons de parler.

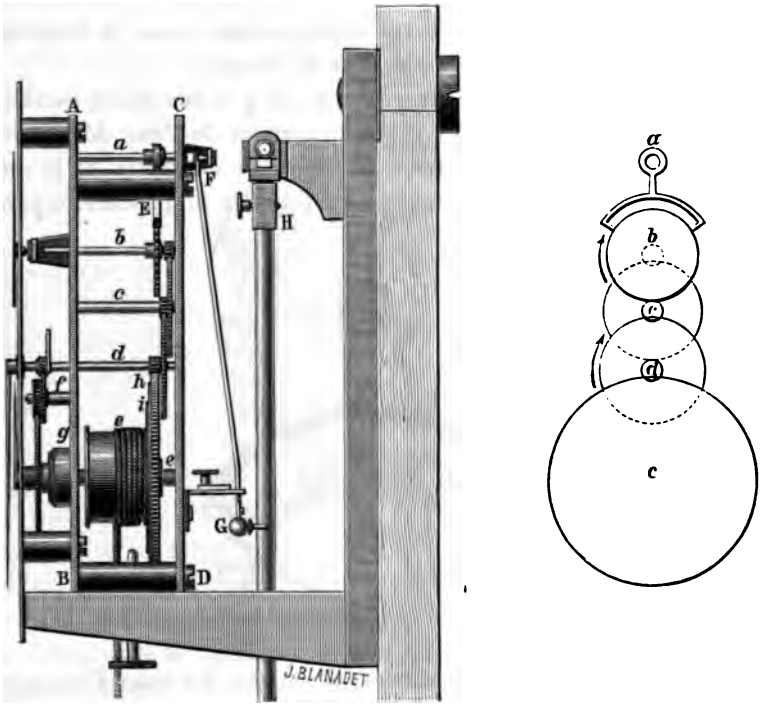
Pendule astronomique.

Les horloges sont devenues des instruments de précision, grâce à l'introduction du pendule comme régulateur. Cette invention capitale est due à Huygens, de l'Académie des Sciences. On y

distingue le rouage avec le poids moteur, l'échappement qui met en communication le rouage avec le pendule régulateur, enfin un petit appareil destiné à permettre de remonter la pendule sans interrompre sa marche. En réalité, le rouage se réduirait à un simple compteur chargé d'enregistrer les oscillations isochrones du pendule, s'il n'avait en outre la fonction d'entretenir lesdites oscillations.

Rouage. — Le rouage est compris entre deux plaques métalliques AB, CD; *e* est le tambour sur lequel s'enroule la corde qui soutient le poids moteur. Ce tambour porte une roue dentée qui engrène avec le pignon de l'axe des minutes *d*. A l'une des extrémités de cet axe est fixée l'aiguille des minutes; il porte en outre

Fig. 50.



une roue dentée de 96 dents, qui agit par un second pignon de 12 dents placé sur l'axe intermédiaire C. Celui-ci porte une roue dentée de 90 dents qui agit sur un pignon de 12 dents de l'axe des

secondes b. Par cette disposition, l'axe des minutes tourne dans le même sens et 60 fois plus lentement que celui des secondes, car le rapport de leurs vitesses sera

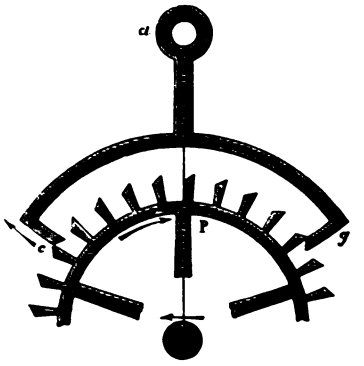
$$\frac{90 \times 96}{12 \times 12} = 60.$$

L'axe des secondes b porte la roue d'échappement armée de 30 dents, laquelle est arrêtée, à chaque oscillation du pendule régulateur placé en arrière, par le moyen d'une ancre fixée à l'arbre a. Celle-ci est reliée au pendule au moyen de la fourchette FG, dont les deux dents embrassent la tige du pendule. Ce dernier est suspendu par un ressort au pilier qui soutient la cage de l'horloge.

Échappement à ancre dépendant et à repos. — (On trouvera la théorie mathématique de cet échappement dans le troisième Volume du *Cours de Mécanique* de M. Resal.)

Supposons d'abord que les palettes c et g d'une ancre oscillant autour de l'axe a (placé sur le prolongement de l'axe de rotation du pendule) comprennent un nombre entier de dents de la roue d'échappement. La *fig.* 51 représente l'instant où le pendule passe

Fig. 51.



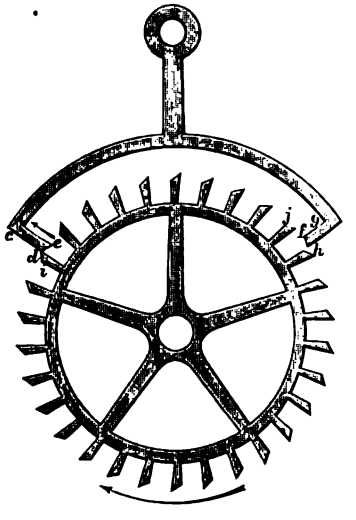
par la verticale pour remonter vers la gauche. La roue d'échappement, sollicitée par le poids moteur, tend à tourner dans le sens de la flèche F.

A ce moment, la palette C va dégager la dent qui bute contre elle ; mais la palette g, venant à s'abaisser, arrête aussitôt une dent

de la roue. On voit que de cette façon la roue d'échappement ne pourrait marcher, dans quelque sens qu'oscille le pendule. Les palettes *c* et *g* seront toujours en prise, soit à gauche, soit à droite, avec une dent, et, si on leur donne un profil circulaire ayant le point *a* pour centre, la dent de gauche glissera sur la surface convexe de la palette de gauche sans avancer ni reculer; il en sera de même pour la dent de droite, qui bute à son tour sur la surface concave de la palette de droite.

Les choses se passeront autrement si les palettes de l'ancre comprennent un nombre entier de dents plus un demi-intervalle de dents, comme dans la *fig.* 52. Au moment où la dent *i* cesse d'être en prise avec la palette *cd*, la roue d'échappement deviendra libre et se mettra à tourner d'un demi-intervalle de dents, jusqu'à ce que

Fig. 52.



la dent *j* vienne buter contre la face interne *gf* de la palette de droite, qui s'est enfoncée entre les dents. Le même effet se reproduira en sens inverse à l'oscillation suivante lorsque le pendule, repassant par la verticale, remontera vers la droite, et ainsi de suite.

Ces frottements et la résistance de l'air détruiraient bien vite le mouvement oscillatoire du pendule. Pour lui restituer l'impulsion nécessaire et entretenir ses oscillations au moyen de l'action du

poids moteur, on termine les palettes de l'ancre par de petits plans inclinés *de*, *fh*, sur lesquels glissent, en les poussant, les dents de la roue d'échappement. L'épaisseur des palettes, et par suite la longueur de ces deux petites faces *de*, *fh*, doit être un peu moindre qu'un demi-intervalle de dents. De la sorte, la roue d'échappement, qui commence à se mouvoir dès que la dent *i* glisse sur la levée *de*, n'est complètement libre qu'un très court instant, au bout duquel elle vient frapper, avec un bruit sec, sur la palette *gh*. C'est pourquoi cet échappement est appelé *dépendant* (sous-entendu du rouage). Il est aussi dit *à repos*, parce que la roue d'échappement reste immobile tout le temps que la dent *i* glisse sur la palette *cd* ou que la dent *j* glisse sur la palette *cf*.

Puisqu'à chaque oscillation du pendule il ne passe entre les pattes de l'ancre qu'un demi-intervalle de dents, on donne 30 dents et non 60 à la roue d'échappement dont l'axe porte l'aiguille des secondes.

Malgré ce moyen d'entretenir l'oscillation du pendule, celle-ci varie d'amplitude avec le temps, à cause de l'épaississement des huiles des pivots de tous les axes. Mais l'isochronisme des oscillations n'en est pas sensiblement altéré, pourvu que leur amplitude ne dépasse pas certaines limites. Si elle venait à se réduire beaucoup, on augmenterait un peu le poids moteur.

La tige du pendule doit être compensée pour les variations de température. Nous en rappellerons seulement le principe. La tige

Fig. 53.

coudée *acdefb*, d'un seul métal (acier), se dilate comme une tige de longueur *ab*, parce que la dilatation en sens inverse de la tige

montante *de* compense celle de *ff'*. Mais, si l'on fait *de* en un métal trois fois plus dilatable (zinc), il suffit que *de* soit la moitié de *ab* pour que *ab* reste invariable à toute température (¹).

Pour battre 86400ˢ par jour sidéral, le pendule doit avoir une longueur déterminée. Afin de lui donner cette longueur sans interrompre la marche, on agit sur le ressort de suspension à l'aide d'une vis qui le fait remonter ou redescendre un peu entre les mâchoires qui le serrent, jusqu'à ce que la longueur voulue soit atteinte.

Pour mettre la pendule à l'heure, en supposant qu'elle s'en soit écartée d'un certain nombre de minutes, on agit sur l'aiguille des minutes, fixée par un manchon à frottement doux sur l'axe des minutes; mais on ne doit jamais toucher à l'aiguille des secondes.

Les pendules astronomiques marchent un mois sans avoir besoin d'être remontées. Il faudrait, dans la figure précédente, pour éviter l'obligation de donner à la descente du poids moteur une trop grande excursion, placer un axe intermédiaire avec pignon et roue dentée entre l'arbre des minutes et l'arbre du tambour, afin de ralentir la vitesse de ce dernier.

Remontoir. — Soient *a* la circonférence du tambour sur lequel s'enroule la corde du poids moteur, et *b* celle d'une roue à rochet fixée au tambour, tandis que la roue motrice est libre; pour entraîner celle-ci dans le sens de la flèche, il suffit de la relier à la roue à rochet par un doigt *f* fixé à cette même roue motrice (*fig.* 54). On peut alors remonter le poids en faisant tourner le tambour en sens inverse à l'aide d'une clef engagée dans le carré C, sans agir en aucune façon sur la roue motrice *d*, car alors le doigt *f* sautera par-dessus les dents du rochet, qui ne la retiendront plus. Mais pendant ce temps le rouage resterait immobile. Pour lui communiquer, pendant le temps du remontage, l'équivalent de la force motrice du tambour et de son poids, on fixe le doigt *f* sur une seconde roue à rochet (*fig.* 55), libre autour de l'axe du tambour, mais attachée par un ressort à la roue motrice et retenue, pendant le remontage, par un doigt *g* fixé à l'une des platines qui forment

(¹) La dilatation de l'acier pour 1° d'augmentation de température est d'à peu près 0,000011 de la longueur totale; celle du zinc est sensiblement 0,000033.

la cage du rouage. Pendant la marche, cette seconde roue à rochet est entraînée par la première; son ressort se tend jusqu'à ce que la tension dépasse la résistance du rouage; alors elle entraîne la

Fig. 54.

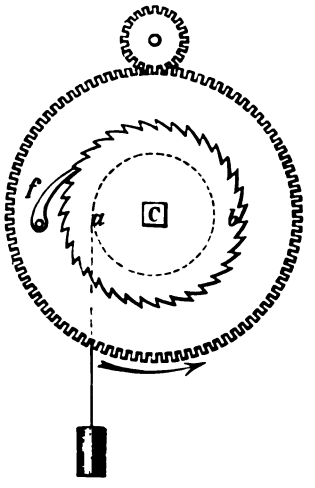
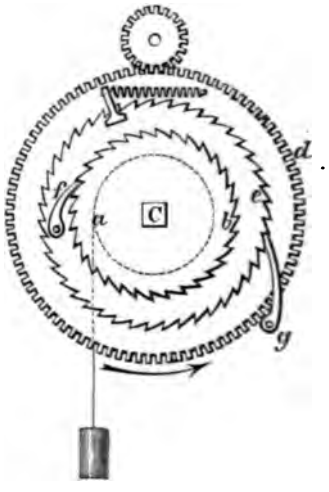


Fig. 55.



roue *d*; mais, dans le remontage, cette seconde roue à rochet est débarrassée de la première et arrêtée aussitôt par le doigt *g*. Elle agit donc sur la roue motrice *d* par le moyen de son ressort, dont la tension, une fois établie, suffit à faire marcher quelques instants le rouage (¹).

Minuterie.

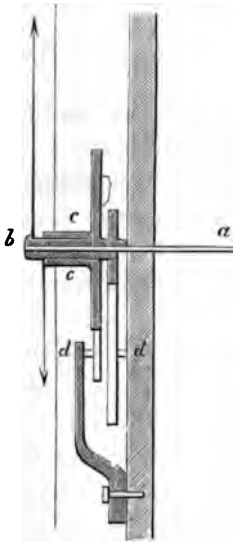
Sur le plan d'une horloge donné plus haut, l'aiguille des heures est séparée de celle des minutes. La disposition ordinaire consiste à rassembler ces deux aiguilles et à les faire tourner autour d'un même axe, mais avec des vitesses différentes, à l'aide de manchons emboîtés et d'un petit système de roues et de pignons distincts du système général.

L'arbre des minutes *ab* s'engage à frottement dans un manchon qui porte à son extrémité une longue aiguille, celle des minutes.

(¹) Ce ressort supplémentaire a en réalité, dans les horloges, une forme très différente de celle qui a été adoptée, pour plus de clarté, dans la *fig.* 55.

Ce manchon porte lui-même un second manchon qui peut tourner autour du premier presque sans frottement. Le second porte l'aiguille des heures. Comme celle-ci doit tourner autour de l'axe commun avec une vitesse douze fois moindre que celle des minutes,

Fig. 56.



on obtient ce mouvement à l'aide d'un rouage particulier dont voici la description. A la base du premier manchon intérieur on place un pignon conduisant une roue dentée, fixée elle-même à l'axe de renvoi *dd* (*fig.* 56). Sur cet axe se trouve un autre pignon qui conduit une deuxième roue placée à la base du manchon entièrement mobile qui porte l'aiguille des heures. Si les pignons ont, l'un trois fois moins, et l'autre quatre fois moins de dents que leurs roues correspondantes, le manchon extérieur sera entraîné par le manchon intérieur avec une vitesse douze fois moindre.

La pendule sidérale doit battre $86\,400^s$ en un jour sidéral, c'est-à-dire entre deux passages consécutifs d'une même étoile au méridien. Il faut, de plus, qu'elle marque $0^h\,0^m\,0^s$ à l'instant du passage du point vernal γ au méridien ou, ce qui revient au même, qu'elle marque l'heure Æ lorsqu'une étoile quelconque, dont l'ascension droite est Æ, passe au méridien. Ces deux conditions ne pouvant être rigoureusement remplies, il y a lieu d'appliquer deux correc-

tions distinctes à l'heure h donnée par la pendule pour obtenir la vraie heure sidérale H. Supposons qu'à une certaine date t on ait trouvé que l'horloge est en retard de ε, et qu'elle bat $86400^s - m$ par jour; m sera son retard diurne et ε son retard absolu à la date t. Celui-ci ira en augmentant avec le temps, proportionnellement à la marche. A une autre date t' on aura

$$\varepsilon' = \varepsilon + (t' - t)m,$$

$t' - t$ étant exprimé en jours et fractions décimales du jour. Il suffira donc, pour avoir l'heure exacte à une date quelconque t', d'ajouter la correction ε' à l'heure indiquée par la pendule.

Cette correction suppose que le pendule est exactement compensé pour les variations de température. S'il en était autrement, ε' serait une fonction de cette température, ou plutôt des variations de celle-ci dans l'intervalle $t' - t$.

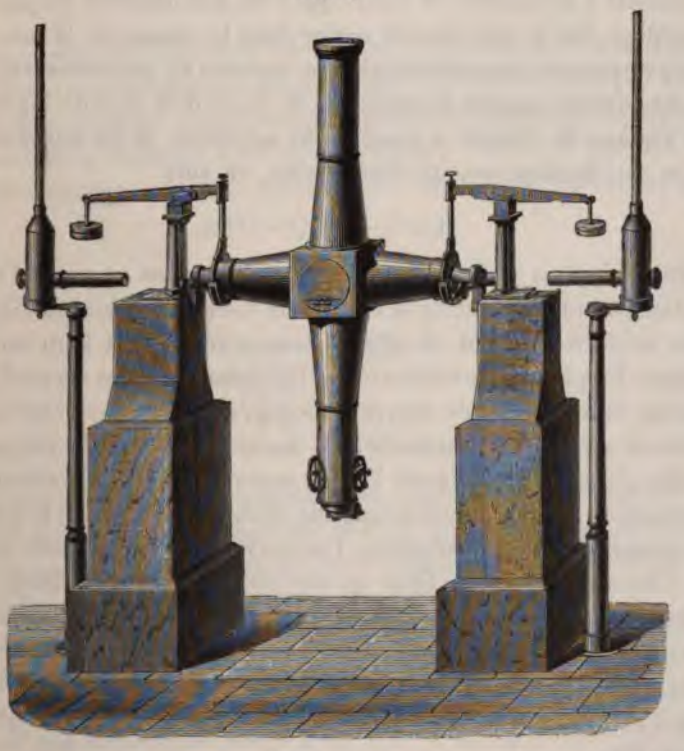
Elle suppose en outre que la pression atmosphérique est restée constante. Le pendule oscillant dans un air plus ou moins dense ne marche pas comme dans le vide. La résistance de l'air et la perte de poids de la lentille plongée dans ce fluide influent quelque peu sur la durée des oscillations. Si la densité de l'air vient à varier, et elle varie effectivement avec la pression barométrique, la marche m subit de petites variations dont il est très difficile de tenir compte. Pour éliminer ces diverses influences, on a été conduit à soustraire absolument l'horloge régulatrice d'un observatoire aux variations de température et de pression. Il faut pour cela la placer sous une cloche hermétiquement fermée dans la couche de température invariable que l'on rencontre dans le sol à une certaine profondeur. A Paris, cette profondeur est de 27^m. C'est aussi celle des caves, dont la température, d'environ 11°, reste absolument constante. On compare de temps en temps les autres horloges de l'Observatoire à celle-là pour en déterminer exactement la marche.

CHAPITRE VII.

LUNETTE MÉRIDIENNE.

Cette lunette tourne autour d'un axe horizontal qui est porté lui-même par des coussinets solidement fixés à deux grands piliers

Fig. 57.



en pierre de taille. Le plan vertical décrit par la ligne de visée doit coïncider avec le méridien. Au-dessous de la lunette, entre les deux

piliers, se trouve une sorte de canapé mobile sur lequel l'observateur se couche ou s'assied quand il observe des astres à une assez grande hauteur. La pendule sidérale, portée par un pilier séparé, est placée à côté de la lunette méridienne, de telle sorte qu'à tout moment l'observateur puisse voir le cadran et entendre distinctement les battements de la pendule.

Le réticule de la lunette porte un double fil parallèle à l'axe de rotation et un autre fil perpendiculaire à cet axe. Si l'instrument est bien rectifié, ce second fil se projette sur le méridien céleste dans toutes les positions de la lunette.

L'observation du passage d'un astre au méridien est fort simple. A l'aide d'un très petit cercle adapté, en guise d'oreille, à la lunette (on le voit près de l'oculaire sur la figure) et d'un niveau, on amène la lunette à la hauteur où l'astre que l'on doit observer va passer au méridien. On le voit bientôt entrer dans le champ de la lunette et le traverser avec une certaine vitesse, en vertu du mouvement diurne. L'observateur compte les secondes de la pendule et note l'instant h où l'image de l'étoile a passé au fil méridien. Si les corrections ε et m de l'horloge ont été déterminées, on aura

$$\Pi = h + \varepsilon + (t' - t)m,$$

t' étant l'instant de l'observation. Remarquez que ce genre d'observation est indépendant de la réfraction. Celle-ci ne fait jamais sortir une étoile du vertical où elle se trouve réellement à un moment donné. Le plan du méridien étant lui-même un plan vertical, lorsqu'une étoile paraît s'y trouver, c'est qu'elle s'y trouve réellement. Partout ailleurs la coordonnée Æ serait altérée par la réfraction.

On s'attache à maintenir l'étoile entre les deux fils horizontaux, distants de $10''$ à $15''$ seulement, afin d'observer toujours le passage au même point du fil méridien. Lorsqu'il s'agit d'une étoile voisine de l'équateur, la petite ligne qu'elle parcourt dans le champ de la lunette est sensiblement rectiligne, et l'étoile, une fois amenée entre les deux fils horizontaux, y reste jusqu'au bout. Si elle est très voisine du pôle, la courbure de la trajectoire devient sensible, et il faut peu à peu agir sur la lunette afin de maintenir cette étoile entre les deux fils.

Pour obtenir plus de précision, on place dans le réticule un certain nombre de fils équidistants parallèles à celui du milieu; on

observe le passage de l'étoile à chacun d'eux et on prend la moyenne de ces résultats.

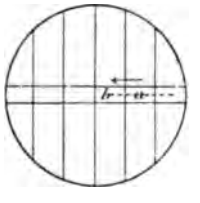
Voici deux exemples de ce genre d'observation :

	Polaire.	α Vierge.
	h m s	h m s
1er fil.....	0.48.42,0	13.18. 5,1
2e fil.....	1. 1. 1,0	0. 0.22,5
3e fil.....	1.13.20,0	0. 0.40,2
4e fil.....	1.25.41,5	0. 0.57,8
5e fil.....	1.38. 0,2	0.19.15,2
Moyenne.....	1.13.21,0	13.18.40,16

Observation du passage d'un astre aux fils de la lunette.

Pour acquérir l'habitude nécessaire, il faut suivre le mouvement de l'étoile et en remarquer les positions successives à chaque battement de la pendule. Puis, étant ainsi préparé et continuant à compter les secondes, on tâche d'estimer la manière dont le fil bissecte l'intervalle constant *ab* (*fig.* 58) compris entre le battement qui pré-

Fig. 58.



cède le passage au fil et le battement suivant. D'autres y procèdent instinctivement, sans chercher à s'en rendre compte. Quel que soit le moyen, il faut plusieurs mois d'exercice avant d'être en état d'atteindre couramment la précision requise.

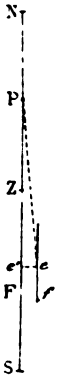
Le degré de précision avec lequel on parvient à observer le passage d'une étoile à un fil dépend évidemment de la vitesse de son mouvement angulaire dans le champ de la lunette. Cette vitesse, de 15″ par seconde de temps pour une étoile équatoriale, se réduit à $15'' \sin\delta$ pour une étoile située à la distance δ du pôle. Pour la polaire $\delta = 1°20'$, $\sin\delta = 0{,}0074 = \frac{1}{43}$ environ. La polaire em-

ploiera donc à peu près quarante-trois fois plus de temps qu'une étoile équatoriale à aller d'un fil à l'autre. Il est facile de calculer ce temps exactement.

Soient (*fig.* 59)

NPZS le méridien céleste projeté sur le plan de l'horizon;
F le fil méridien;
f un fil situé à la distance angulaire ee';
e une étoile passant en e et e' sous ces fils.

Fig. 59.



Le temps nécessaire pour aller d'un fil à l'autre sera mesuré par l'angle horaire ePe'. Le triangle rectangle ePe' donnera

$$\sin P = \frac{\sin ee'}{\sin \delta}.$$

L'erreur probable de l'observation du passage d'une étoile à un fil dépend aussi du grossissement G de la lunette. On a trouvé, par de nombreuses expériences,

$$\pm\sqrt{(0^s,07)^2 + \left(\frac{5',2}{G \sin \delta}\right)^2},$$

ce qui donne à peu près $\pm 0^s,07$ pour une étoile équatoriale observée avec un grossissement de 200 fois et $\pm 0^s,70$ pour la polaire. L'erreur probable de la moyenne des observations faites aux

cinq fils est bien moindre; elle se réduit à $\pm \frac{0^s,07}{\sqrt{5}} = \pm 0^s,031$, ainsi que nous le verrons bientôt par la théorie des erreurs [1].

Il résulte de là que, pour déterminer l'heure, il faut observer des étoiles voisines de l'équateur et non des circumpolaires. Mais l'on doit aussi observer ces dernières pour déterminer les erreurs instrumentales, c'est-à-dire les déviations de la lunette lorsqu'elle s'écarte du méridien.

Pendant le jour, les fils se voient parfaitement; ils se peignent en traits noirs sur le fond brillant du ciel, tandis que les étoiles, du moins celles des trois premières grandeurs, apparaissent comme des points lumineux, à cause de leur intensité supérieure à l'éclairement du ciel. Mais, la nuit, les fils ne se verraient pas si l'on n'éclairait artificiellement le champ de la lunette. Pour cela on place obliquement, dans le cube qui réunit les deux moitiés de l'axe de rotation aux deux moitiés du tube de la lunette, un carton blanc qui réfléchit à l'état de diffusion la lumière d'une lampe placée à l'une des extrémités de l'axe, près du foyer d'une lentille convergente. Le tourillon en acier est percé d'un large trou cylindrique qui laisse passer les rayons de la lampe. Le carton incliné à 45° la renvoie vers le réticule, qui se projette ainsi sur un fond lumineux. On peut d'ailleurs en faire varier l'éclat à volonté à l'aide d'un diaphragme mobile placé sur le trajet des rayons. Bien entendu que ce miroir en carton est percé lui-même en son centre d'un large trou elliptique pour laisser passer le faisceau des rayons extérieurs qui vont de l'objectif à l'oculaire.

Rectification de la lunette méridienne. — La lunette méri-

---

[1] On doutera peut-être que l'oreille saisisse de si petites fractions de seconde. Il en est pourtant ainsi. Si l'on place à côté l'une de l'autre deux pendules, l'une de temps sidéral, l'autre de temps moyen, on remarquera que, de six en six minutes à peu près, leurs battements sont parfaitement synchrones ($6^m 6^s$ sid. $= 6^m 5^s$ t. m.). Ils commencent ensuite à discorder, et le désaccord va en croissant jusqu'à ce que l'une regagne l'autre de nouveau. Cela fait une sorte de vernier qui permet de subdiviser la seconde en $6 \times 60 = 360$ parties égales. On s'assurera aisément qu'il n'y a pas plus de cinq à six secondes d'incertitude sur l'instant d'une coïncidence de battements, incertitude qui répond à une différence de $\frac{6}{2} \cdot \frac{1}{360} = \frac{1}{120}$ de seconde. Le centième de seconde n'est donc pas une quantité qui échappe absolument à nos sens.

dienne ne donne pas immédiatement les ascensions droites absolues, puisque le point γ n'est pas observable, mais elle donne les différences d'ascension droite entre les diverses étoiles. Si donc nous faisons choix de l'une d'elles pour servir d'origine provisoire au jour sidéral et aux Æ, il nous suffira de déterminer plus tard l'ascension droite absolue de cette étoile par rapport au point γ pour avoir aussitôt, par une simple addition, les ascensions droites absolues de toutes les autres. Ce qui fait le mérite de cet instrument, c'est que, n'opérant que dans un plan vertical, les observations ne sont affectées ni de la réfraction atmosphérique ni de la flexion du tube ou de l'axe de la lunette. Nous avons vu, en effet, que la réfraction agit dans le vertical de l'astre observé en le rapprochant du zénith, mais n'a aucune tendance à le faire sortir de ce plan vertical. Quant à la flexion, les deux moitiés de la lunette méridienne à droite et à gauche du vertical qu'elle décrit étant parfaitement symétriques, la flexion du tube s'opère dans ce plan et ne produit aucune déviation latérale. Enfin la mesure des Æ s'effectue à l'aide d'une pendule et non au moyen d'un cercle divisé; on n'a donc pas à craindre ici des erreurs systématiques de division, mais seulement de petites anomalies dans la marche de la pendule, dues aux trépidations du sol ou aux variations de pression ou de température. Il n'est pas impossible d'y remédier complètement.

Pour que l'axe optique décrive le méridien, il faut : 1° que cet axe optique ou ligne de collimation soit perpendiculaire à l'axe de rotation, autrement il décrirait un cône qui tracerait sur le ciel un petit cercle parallèle au méridien, mais ne pouvant coïncider avec lui ; 2° que l'axe de rotation soit parfaitement horizontal, autrement le plan décrit par la ligne de visée serait incliné sur l'horizon et ne pourrait coïncider avec le méridien ; 3° que cet axe soit bien perpendiculaire à la méridienne SN du lieu.

Trois opérations sont donc nécessaires pour rectifier l'instrument et pour déterminer les petites erreurs qui subsistent encore après une correction manuelle, ou qui surviennent par suite de l'instabilité des piliers ou des variations de température. On saisira aisément l'analogie qui existe entre les rectifications d'un théodolite et celles d'un instrument des passages. Les opérations sont les mêmes, les formules de correction sont encore plus simples.

Erreur de collimation. — On opère ici par retournement. La lunette étant dirigée, à l'horizon, sur une mire très éloignée et portant une division, on note le trait m sur lequel se projette le fil méridien, puis on retourne la lunette avec la plus grande précaution. Pour cela, on la soulève d'abord avec une machine *ad hoc,* on la fait tourner de 180° autour d'un axe vertical et on la fait ensuite redescendre d'un mouvement doux jusqu'à ce que les tourillons reposent sur leurs coussinets. Alors on ramène la lunette sur la mire. Si la ligne de visée répond encore à la division m de la mire, l'erreur de collimation est nulle; s'il en est autrement, soit m' la division bissectée actuellement par le fil méridien : l'erreur de collimation sera

$$c = \frac{m' - m}{2},$$

qu'on réduira en secondes d'arc en déterminant une fois pour toutes la valeur des parties de la division de la mire. Pour corriger cette erreur, on déplacera le réticule tout entier à l'aide de ses vis antagonistes jusqu'à ce que le fil méridien réponde à la division $\frac{m' + m}{2}$. La même manœuvre, répétée après la correction, permettra de mesurer la collimation résidue c.

Les astronomes évitent de toucher trop souvent à leurs instruments; ils laissent donc subsister une erreur c, pourvu qu'elle soit très petite, et ils en tiennent compte par le calcul. Si cette petite déviation est orientale, il faudra ajouter à l'heure du passage d'un astre quelconque par le fil méridien la correction

$$\frac{1}{15}\frac{c}{\sin\delta}.$$

Par exemple, s'il s'agissait d'une étoile équatoriale et que c fût de $1'',5$, la correction serait de $0^s,10$; mais, pour la polaire, elle s'élèverait à $4^s,31$.

Erreur d'inclinaison. — Si nous supposons que les tourillons soient bien égaux et bien ajustés dans le prolongement l'un de l'autre, il suffira de placer un niveau reposant par ses deux pieds sur les tourillons pour mesurer l'inclinaison et, au besoin, pour la corriger. Soient m le milieu de la bulle dans la première position

du niveau et m' le milieu après qu'on a retourné le niveau bout pour bout sur l'axe. L'inclinaison sera

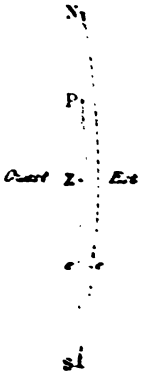
$$i = \frac{m' - m}{2}.$$

Pour la corriger, il suffira de soulever un peu l'un des tourillons, qui doit être armé à cet effet d'une vis à filets serrés, jusqu'à ce que la bulle marque la division $\frac{m' + m}{2}$. Il est facile de voir que la formule ci-dessus donne l'angle d'élévation, positive ou négative, du tourillon vers lequel s'est trouvé le zéro de la division du niveau dans la première pose. Par exemple :

	Extrémité de la bulle. Est.	Ouest.	Moyennes.		
1re pose.....	28p,2	18p,0	m.....	23p,1	1p = 1",52
(On retourne le niveau.) 2e pose.	21,3	31,5	m'.....	26,4	
			$m' - m$.	3,3	
			i.....	1,65 = 2",49	

C'est le tourillon Ouest qui est trop élevé.

Fig. 60.



Si le tourillon Ouest est trop élevé, le grand cercle dessiné sur le ciel par la ligne de visée ne décrira pas le méridien projeté en SZPN (*fig.* 60), mais un arc de grand cercle S*e*N. Une étoile *e*

rencontrera ce grand cercle avant de passer au méridien avec un angle horaire ePe' donné par

$$ePe' = \frac{1}{15}\frac{ee'}{\sin\delta}.$$

Mais l'angle dièdre en S étant l'inclinaison i, on aura, par le triangle rectangle See',

$$\sin ee' = \sin i \sin Se' \quad \text{ou} \quad ee' = i\cos z,$$

valeur qu'il faut porter dans la relation précédente, ce qui donne

$$\frac{1}{15}\frac{i\cos z}{\sin\delta}.$$

L'inclinaison de l'axe d'une lunette méridienne est sujette à de petites variations plus ou moins périodiques, dépendant de l'état des couches où pénètrent les fondations des piliers en pierre de taille de l'instrument. La température y varie fort peu et suit de loin, d'une manière très affaiblie, les vicissitudes des saisons; mais les pluies y pénètrent et font gonfler les couches. En fait, il n'y a pas de fondations, si profondes et si solides soient-elles, qui exemptent les instruments de ces petites variations. Il faut donc mesurer de temps en temps l'inclinaison i avec des niveaux très sensibles.

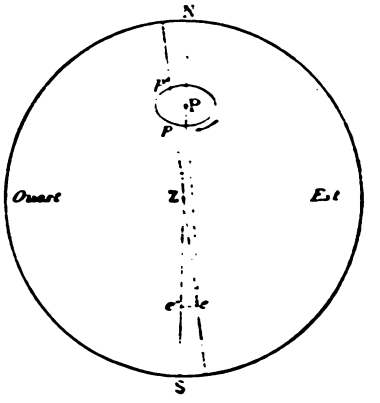
Nous avons supposé des tourillons d'égal diamètre : s'il en était autrement, on s'en apercevrait par ceci que l'inclinaison i ne serait plus la même avant et après le retournement.

Erreur d'azimut. — Celle-là ne peut être déterminée que par l'observation des étoiles circumpolaires. Si cette erreur est nulle, si la lunette est bien dans le méridien, le plan qu'elle décrit coupe en parties égales les parallèles parcourus par les circumpolaires, et l'on trouve 12^h juste entre les deux passages d'une de ces étoiles au méridien au-dessus et au-dessous du pôle. Si cet intervalle diffère un peu de 12^h, il faut faire mouvoir horizontalement un des coussinets de l'axe de la lunette jusqu'à ce qu'on ait obtenu l'égalité.

Ici intervient un nouvel emploi de la mire dont nous nous sommes servis déjà pour corriger la ligne de collimation. Lorsqu'on

a une fois réussi à placer exactement la lunette dans le méridien, on la dirige sur la mire et on note la division qui répond au fil du milieu. Dès lors, quand, à une époque ultérieure, on voudra commencer une série d'observations, on devra s'assurer d'abord, en pointant sur la mire, que le fil méridien répond bien à cette division. A cause de la grande distance (plusieurs lieues) qui doit séparer la mire de la lunette, les très petites variations que la mire peut éprouver, par suite des changements de température ou des légers mouvements du sol, seront insensibles, car 1^{mm}, par exemple, qui, s'il s'agissait d'un des tourillons, déterminerait une déviation azimutale énorme, ne produirait ici que $\frac{0.001}{16000}$ (distance de 4 lieues) ou $\frac{1''}{80}$. Voyons la correction qu'il faut appliquer à l'heure du passage

Fig. 61.



d'une étoile au fil du milieu lorsque la lunette a une petite déviation azimutale a vers l'est. Une étoile e (*fig.* 61) rencontrera ce fil avant de passer au méridien sous un angle horaire $ePe' = \frac{ee'}{\sin\delta}$. L'angle dièdre en Z du petit triangle rectangle eZe' étant a, et Ze ou $Z'e'$ étant z, on aura

$$ee' = a \sin z.$$

Par suite, il faudra ajouter à l'heure du passage de l'étoile en e' la correction

$$\frac{1}{15}\,\frac{a \sin z}{\sin\delta}.$$

Appliquons cela à la circumpolaire p, à son passage supérieur observé à l'heure h. L'heure du passage au méridien sera évidemment

$$h - \frac{1}{15}\frac{a \sin z}{\sin \delta}.$$

Soit h' l'heure du passage inférieur en p' au fil du milieu, lorsque la distance zénithale est $Zp' = z'$. Nous aurons, pour l'heure de son passage au méridien,

$$h' + \frac{1}{15}\frac{a \sin z'}{\sin \delta}.$$

Mais la différence de ces heures doit être juste de 12^h; on aura donc l'équation de condition

$$h' + \frac{a \sin z'}{15 \sin \delta} - h + \frac{a \sin z}{15 \sin \delta} = 12^h,$$

d'où l'on pourra tirer la valeur de a. Plus l'étoile est voisine du pôle et mieux a sera déterminé, puisque son coefficient $\frac{\sin z' + \sin z}{\sin \delta}$ sera d'autant plus grand que δ sera plus petit. Mais, comme l'un des deux passages a ordinairement lieu en plein jour, il faut recourir aux plus belles étoiles : de là l'importance de la polaire dans la pratique journalière des astronomes. Bien que h' et h ne s'observent guère qu'à $0^s,3$ près, ce qui donne $\pm 0^s,42$ d'incertitude sur $h' - h$, le diviseur $\frac{43}{15}$ réduit l'erreur à craindre sur a à moins de $0'',2$ (¹).

En résumé, à l'heure h du passage d'une étoile observé au fil moyen du réticule, il faut ajouter, pour tenir compte des trois seules erreurs de l'instrument,

$$\frac{a \sin z}{\sin \delta} + \frac{i \cos z}{\sin \delta} + \frac{c}{\sin \delta},$$

(¹) Cela suppose que pendant les douze heures l'instrument n'a pas varié en azimut. On s'en assure avec la mire, ou mieux avec les collimateurs dont il sera question plus loin, et, s'il était survenu quelque changement, on le mesurerait et on en tiendrait compte.

a, i, c étant exprimés en secondes de temps [1]. Il est aisé de varier la forme de cette expression. Remplaçons z par $\delta - \lambda$, développons les sinus et cosinus, et posons

$$a \cos\lambda + i \sin\lambda = m,$$
$$-a \sin\lambda + i \cos\lambda = n,$$

il viendra

$$m + \frac{n}{\operatorname{tang}\delta} + \frac{c}{\sin\delta};$$

le calcul en est un peu plus simple. On verra, à la fin de ce cours, que l'effet de l'aberration diurne a la forme du dernier terme et peut être réuni avec lui, en remplaçant c par $c - 0^s,021 \sin\lambda$. Voici, par exemple, un extrait du registre d'observations faites à la lunette méridienne de l'Observatoire de Paris :

---

[1] Dans cette formule, il faut regarder z comme positif au sud du zénith et négatif au nord, δ comme positif au-dessus du pôle et négatif au-dessous

DISTANCE polaire approchée.	NOM de l'astre observé.	MOYENNE des cinq fils.	CORRECTION instrumentale.	PASSAGE au méridien.	SECONDES de l'Æ. (*C. d. T.*)	DIFFÉRENCE.	CORRECTION de la pendule.	Æ CONCLUE.	SIGNATURE de l'observateur.
				Date : 31 août 1880.					
1°. 3′	λ Petite Ourse..	19h.43m.15s,40	+43,90	19h.43m.58s,30	56,33				Folain.
106.31	Sirius.....	6.39.59,40	— 0,19	6.39.59,21	53,51	—5s,70			Folain.
84.27	Procyon.....	7.33. 9,18	+ 0,04	7.33. 9,22	3,52	—5,70	—5,70		Folain.
61.41	Pollux.....	7.38. 6,38	+ 0,35	7.36. 6,73	1,04	—5,69			Folain.
72.13	☾ 2e bord.....	8.10.49,94	+ 0,21	8.10.50,15				8h.10m.44s,45	Folain.
75.35	☿ 2e bord.....	9.51. 9,92	+ 0,15	9.51.10,07				9.51. 4,37	Folain.
				1er septembre 1880.					
81.56	☉ 1er bord.....	10.42.48,42	+ 0,08	10.43.52,80				10.43.47,09	Folain.
	☉ 2e bord.....	10.44.57,02							
86. 1	♀ 1er bord.....	11.36.27,20	+ 0,03	11.36.27,23				11.36.21,52	Folain.
— 1.19	α Pte Ourse, P. I.	13.16.23,70	—35,08	13.16.48,62	46,93				Folain.
70.11	Arcturus.....	14.10.18,98	+ 0,23	14.10.19,21	13,35	—5,86			Folain.
62.25	ε2 Bouvier.....	14.39.52,14	+ 0,35	14.39.52,49	46,79	—5,70	—5,71		Folain.
62.52	α Couronne....	15.29.44,04	+ 0,35	15.29.44,39	38,67	—5,72			Folain.
68.14	β Hercule.....	16.25.11,58	+ 0,25	16.25.11,83	6,25	—5,58			Folain.

Le niveau a donné $i = +0^s,38$. Le retournement a donné $c = +0^s,15$. De l'observation des deux étoiles circumpolaires on tire $a = -0^s,55$. La quatrième colonne contient les corrections instrumentales calculées avec ces valeurs de i, a et c. La cinquième colonne donne l'heure du passage de chaque astre au méridien en temps de la pendule. Les Æ des étoiles fondamentales, prises dans la *Connaissance des Temps,* sont inscrites dans la sixième colonne (les secondes seulement), et la différence avec le passage observé donne la correction de la pendule. Elle est, le 31 août, vers 8^h, de $-5^s,70$. Le lendemain, vers 15^h, c'est-à-dire 7^h après, elle est de $-5^s,71$. La marche diurne est donc négligeable. Pour avoir les Æ du Soleil, de la Lune et des planètes observées ces jours-là, il suffit d'ajouter la correction $-5^s,70$ et $-5^s,71$ aux heures marquées par la pendule à l'instant de leurs passages au méridien.

Comme, dans cet exemple, deux circumpolaires différentes ont été observées au passage supérieur et au passage inférieur, on est obligé d'emprunter leurs Æ à la *Connaissance des Temps.*

Pour λ Petite Ourse,

$$\frac{0^s,38 \cos z}{\sin \delta} + \frac{0^s,15}{\sin \delta} - \text{corr. pend.} = +18^s,35;$$

en l'ajoutant à l'instant observé on aura

$$19^h 43^m 32^s,75,$$

et ce serait l'Æ de cette étoile si a était nul. Mais l'Æ est

$$19^h 43^m 56^s,33.$$

Donc l'effet du petit azimut est ici $+23^s,58$; on en tire a par

$$\frac{a \sin z}{\sin \delta} = 23^s,58,$$

ce qui donne $a = -0^s,67$ (on n'oubliera pas de compter ici z comme négatif).

En opérant de même pour la polaire PI, on trouverait $a = -0^s,42$. La moyenne de ces deux valeurs est $a = -0^s,55$.

Dans la pratique, on distingue deux positions de la lunette. L'une, position directe, est celle où l'on observe le plus souvent.

L'autre, position inverse, après retournement. Si l'on fait une série d'observations dans cette seconde position, il ne faut pas oublier que l'erreur de collimation c change alors de signe. Ce retournement doit être fait aussi souvent qu'il y a lieu de soupçonner quelque variation dans la direction de la ligne de visée. Il s'opère à l'aide d'un mécanisme spécial qui permet de soulever la lunette très doucement et d'en retourner l'axe bout pour bout (¹). La lunette méridienne est ordinairement munie de contrepoids qui ne laissent peser sur les tourillons qu'une faible partie de la charge.

Collimateurs.

Il est intéressant d'examiner les ressources de tout genre que les astronomes mettent en œuvre pour étudier ou écarter les causes d'erreurs. Les mires éloignées ont l'inconvénient de paraître souvent ondulantes, à cause du mélange incessant de masses d'air d'inégale densité dans les couches basses de l'atmosphère. Elles ont, de plus, le grave inconvénient de n'être pas visibles la nuit. On les a remplacées par des collimateurs à long foyer.

Lorsqu'on regarde dans une lunette par l'objectif, il est impossible de distinguer les fils du réticule; mais, si l'on y dirige une lunette mise au point sur les astres, on voit aussitôt la croisée des fils avec une netteté merveilleuse. Cela tient à ce que, dans les lunettes astronomiques, le réticule doit être placé dans le plan focal principal. Dès lors, le faisceau conique émané d'un point du réticule est transformé par l'objectif en un faisceau de rayons parallèles qui, reçu par une seconde lunette astronomique, forme image au foyer principal de celle-ci.

Supposons maintenant un réticule à la seconde lunette. Il sera facile de diriger celle-ci de manière à faire coïncider ce réticule avec l'image de l'autre. Alors les axes optiques des deux lunettes seront en ligne droite ou du moins parallèles. C'est, comme l'on voit, une manière de reculer à l'infini une mire très voisine. W. Struve a eu l'idée heureuse de s'en servir en guise de mire. Devant l'objectif de la lunette méridienne et porté sur un pilier, imaginez un objectif, mobile latéralement, et rendant visible, dans

(¹) Un appareil de ce genre se voit sur la *fig.* 67.

la lunette, une mire placée à 60^m ou 80^m au delà. Cette mire nouvelle pourra être éclairée la nuit; elle sera toujours parfaitement visible, presque sans ondulations, et elle servira tout aussi bien qu'une mire très lointaine à donner une direction fixe en azimut ou à rectifier la collimation de la lunette méridienne. Si même on emploie ainsi deux collimateurs opposés, l'un au sud, l'autre au nord, que l'on puisse diriger l'un sur l'autre, soit en soulevant un peu la lunette méridienne, soit en pratiquant une ouverture ronde dans son cube, on sera en état, en pointant alternativement la lunette méridienne sur ces deux mires qui fournissent deux directions diamétralement opposées, de corriger ou de rectifier la collimation de l'instrument méridien sans avoir besoin d'opérer le retournement. Nous verrons plus loin une autre application de ces collimateurs que les physiciens ont empruntés aux astronomes et dont ils ont tiré un très grand parti dans leurs expériences.

Erreur personnelle.

Nous avons déjà dit que l'observateur est lui-même une sorte d'instrument sujet à la fois à des erreurs accidentelles et à des erreurs constantes ou du moins systématiques. Il intervient par les organes de ses sens, l'œil et l'oreille, et par son système nerveux qui reçoit et coordonne les impressions. Voici quel est l'effet de cette intervention. Un observateur exercé aura bien vite fait de déterminer l'heure à $0^s,02$ ou $0^s,03$ près par quelques étoiles fondamentales. Il lui suffit d'un petit nombre d'observations pour compenser l'effet des erreurs dues aux ondulations des étoiles ou à ses propres fautes accidentelles. Mais si un autre astronome du même établissement, employant le même instrument, vient à déterminer l'heure à son tour par des observations analogues, on trouvera entre les deux résultats un désaccord dix, quinze, vingt fois plus grand que l'erreur probable de chacun d'eux pris à part. Chose remarquable, la différence entre les deux observateurs sera toujours à peu près la même et dans le même sens. Maskelyne, le premier qui se soit aperçu de cette singulière anomalie entre un de ses élèves et lui, crut devoir prier celui-ci de renoncer à la carrière de l'Astronomie. On sait aujourd'hui qu'il n'y a pas deux observateurs qui s'accordent, et on

s'est tiré d'affaire en s'imposant l'obligation de ne combiner ensemble que les observations faites par un même observateur. Afin d'éviter toute confusion à cet égard, on a établi la règle que toute observation doit être signée. L'erreur personnelle étant constante, elle disparaît en effet dans la différence de deux observations faites par le même individu, en sorte que les différences d'Æ de deux étoiles ont même valeur, quel que soit l'observateur qui les détermine, tandis que l'heure absolue variera au contraire de quelques dixièmes de seconde, selon qu'on s'adressera à tel ou tel observateur pour l'obtenir.

On a modifié le système d'observation dans ces derniers temps en supprimant l'intervention de l'ouïe. Supposons que l'observateur ait sous la main le moyen d'enregistrer ses sensations et d'en noter l'instant sur un cylindre tournant d'une vitesse uniforme, à l'aide d'une simple touche qui marque des points sur ce cylindre. Avant et après avoir enregistré ainsi, sur ce cylindre, le passage d'un astre aux différents fils du réticule, il enregistre de même les indications de la pendule, c'est-à-dire la seconde qu'elle bat, en notant l'heure, la minute et la seconde elle-même. Il suffira de relever sur ce cylindre ces indications diverses pour avoir une observation complète. Au lieu d'un si simple mécanisme, on peut aussi faire marquer sur le cylindre tournant les secondes successives par la pendule elle-même au moyen d'appareils électriques. Mais cette ingénieuse méthode laisse encore quelque place à l'intervention du système nerveux de l'observateur : celui-ci marque trop tôt, ou trop tard, suivant sa constitution physiologique, l'instant où l'étoile en mouvement lui paraît bissectée par le fil. L'erreur personnelle se retrouve donc encore, mais réduite, en général, à moins d'un dixième de seconde.

Sans chercher à expliquer ces effets physiologiques, constatons qu'ils n'existent pas lorsqu'il s'agit d'un orchestre ou même de faire marcher des hommes au pas, sur le rythme du tambour; ils ne sont donc pas dus à une paresse de l'ouïe ou à la durée trop grande des sensations auditives.

Ils ne tiennent pas davantage à un défaut de l'œil pour la bissection d'un point fixe par un fil, car cela se juge à $0'',05$, c'est-à-dire à $0^s,003$ près. Ils tiennent à une inertie particulière au système nerveux qui varie, d'un homme à l'autre, dans des limites très

étendues lorsqu'il s'agit d'un phénomène fugitif qu'il faut saisir. On éliminerait ces effets, s'il étaient constants, en déterminant une fois pour toutes l'erreur personnelle d'un observateur, c'est-à-dire la fraction de seconde de temps qu'il faut constamment ajouter ou retrancher aux heures notées par lui, et c'est ce qu'il faut faire toutes les fois qu'on a besoin de connaître l'heure absolue; mais ils dépendent aussi de son état physiologique, de son état de réplétion ou de jeûne, de la circulation du sang régulière ou agitée, etc. La seule ressource, si l'on veut n'être pas arrêté au niveau de la précision actuelle, c'est de supprimer l'observateur (¹).

Suppression de l'observateur par l'enregistrement photographique des observations.

On y parviendra par l'observation photographique combinée avec l'enregistrement mécanique ou électrique du temps. Déjà la chose est bien simple pour le Soleil, parce que l'impression de son image sur une plaque sensible est instantanée. Substituez cette plaque à l'œil de l'observateur devant l'oculaire de l'instrument des passages; mettez en communication électrique la détente, qui doit laisser passer en moins de $\frac{1}{1000}$ de seconde le faisceau de lumière solaire, avec l'appareil enregistreur du temps : il suffira d'un mouvement du doigt répété 5, 10, 20 fois pendant le passage du Soleil, pour imprimer autant de fois sur la plaque photographique l'image du Soleil et celle des fils du réticule, en même temps que l'électricité aura noté les heures de la pendule avec une exactitude presque absolue. On n'aura plus qu'à mesurer à loisir la distance des bords de l'image à chacun des fils, et cela par une opération où le mouvement n'intervient plus; on obtiendra dès lors, avec une précision incomparable, la coordonnée du centre du Soleil.

Pour les étoiles, l'impression photographique n'est pas instantanée; il y faut, suivant la grandeur, une ou plusieurs secondes. Mais il suffira de communiquer à la plaque sensible un mouvement

(¹) Ces erreurs personnelles varient en outre, pour chaque observateur, suivant l'éclat de l'étoile; elles varient d'une étoile à une planète ayant un disque sensible, et, chose singulière, pour le Soleil ou la Lune, suivant que c'est le premier ou le deuxième bord que l'on observe.

régulier de progression égal à celui de l'étoile pour qu'elle reçoive son empreinte au même point; puis, une ou deux secondes après, on admettra instantanément dans la lunette un faisceau de rayons intenses émanés d'une lampe, pour enregistrer sur la plaque un des fils du réticule, à un instant noté sur l'enregistreur électrique du temps. Ces procédés paraissent aujourd'hui trop coûteux et trop difficiles quand on les compare aux moyens actuellement en usage. Qu'importe, s'il est vrai que l'extrême précision doit être atteinte à tout prix? En fait, la moindre mesure, dans nos observatoires actuels, coûte déjà 10 ou même 100 fois plus qu'à l'époque de Lacaille ou de Bradley. Quand on aura réalisé ces derniers progrès, les géomètres n'auront plus à s'étonner que 10 000 observations recueillies en un siècle, dans les observatoires les plus renommés, ne soient pas capables de fixer, pour le Soleil par exemple, la longitude de l'époque à quelques secondes près.

CHAPITRE VIII.

CERCLE MURAL.

Il sert à mesurer les distances zénithales méridiennes, d'où l'on conclut les distances polaires par la formule

$$\delta = \lambda + z_m,$$

formule où z_m doit prendre le signe — quand il s'agit d'étoiles passant au méridien au nord du zénith.

Si l'étoile est observée à son passage inférieur, la formule devient

$$\delta = z_m - \lambda,$$

et elle est comprise dans la précédente si l'on convient d'y regarder δ comme négatif au-dessous du pôle.

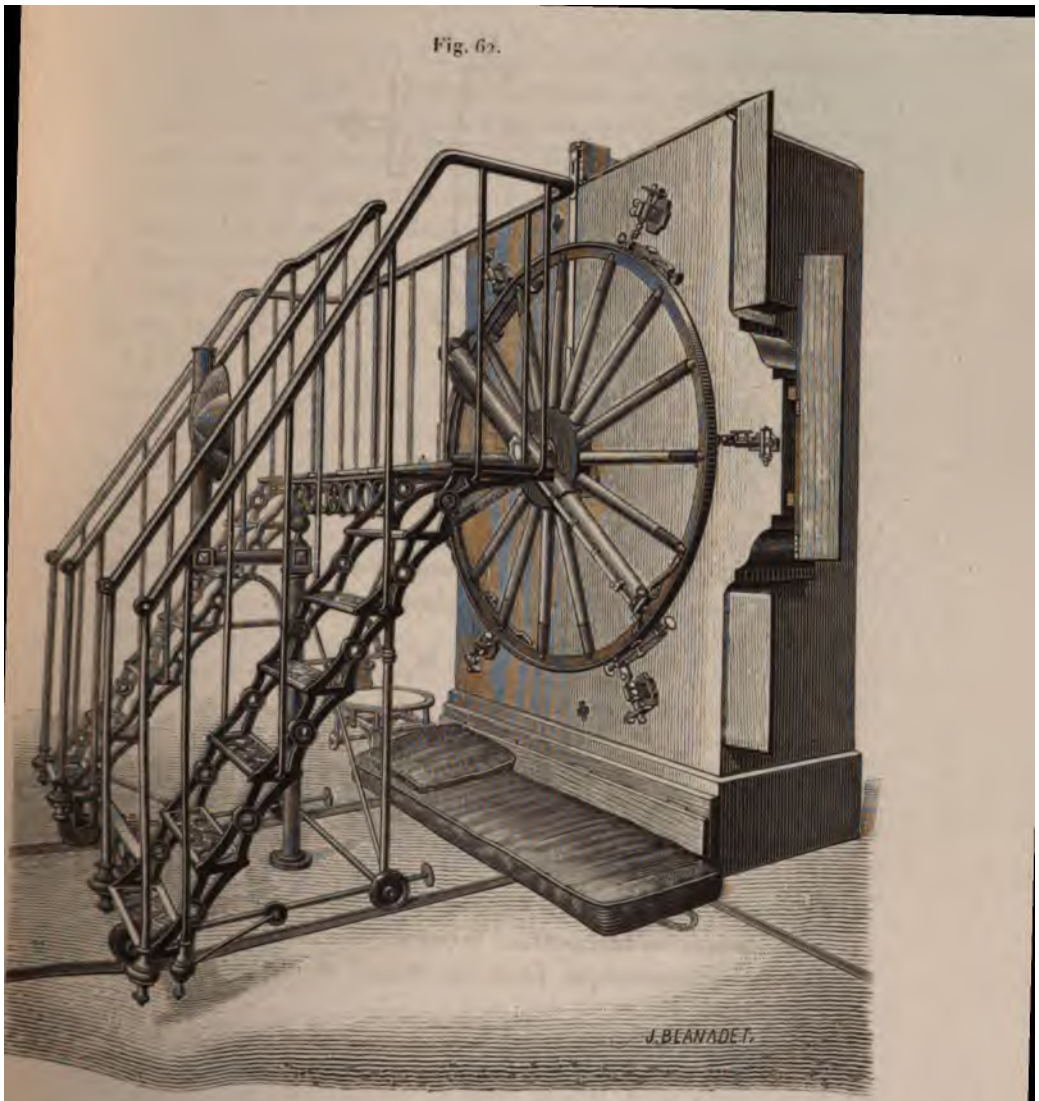
Cet instrument n'est au fond que la partie supérieure d'un théodolite dont l'axe horizontal passerait à travers un large pilier en pierre. Le limbe divisé, sur lequel la lunette est fixée par les deux bouts, est appliqué contre la face verticale de ce pilier, sans le toucher, et se meut dans le méridien. Au lieu de verniers, le cercle est entouré de microscopes équidistants dont les axes sont pointés sur les divisions, et qui sont solidement scellés dans le mur.

Décrivons d'abord ces microscopes.

Supposons que l'axe optique AOa d'un de ces microscopes (*fig.* 63) soit dirigé sur un point A du limbe et tombe entre deux traits, D et D'.

Les images de ces traits se forment dans le plan focal de l'objectif en d et d'. Il s'agit d'obtenir l'arc DA, qu'il faut ajouter à la lecture en D pour avoir la position du point A. Cet arc se mesure en ad, à

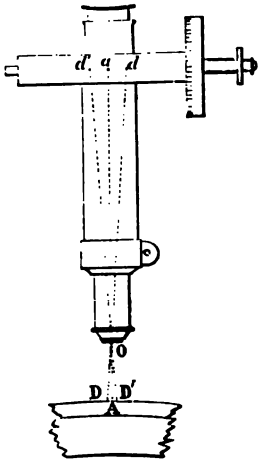
Fig. 62.



Cercle mural.

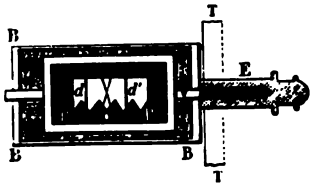
l'aide d'une croisée de fils mobile qui marche de *a* en *d* sous l'action d'une vis micrométrique armée de son tambour divisé en

Fig. 63.



60 parties égales d'environ 1″ chacune. Voici la légende de la *fig.* 64 qui représente le réticule mobile du microscope :

Fig. 64.



BBB, boîte rectangulaire fixée au corps du microscope;
CCC, châssis mobile portant la croisée des fils;
V, vis micrométrique fixée au châssis et engagée dans l'écrou extérieur E;
E, cet écrou qu'on tourne à la main pour faire mouvoir le châssis;
r, *r*, ressorts tendant à écarter le châssis du fond de la boîte afin d'éviter le temps perdu de la vis;
TT, tambour divisé, faisant corps avec l'écrou et destiné à subdiviser un tour de la vis en 60 parties égales;
PP, peigne visible dans le champ du microscope et servant à

compter, par des crans, les tours de vis à partir du zéro ou de l'axe optique aA (*fig.* 63) du microscope;
dd', image des traits DD' du limbe.

Du zéro ou de a en D il y a plus de deux crans, par suite deux tours et une fraction à imprimer à l'écrou pour amener la croisée des fils sur le trait D. Lorsque ce pointé est fait, on note le nombre de tours et on lit la fraction de tour sur le tambour.

L'intervalle de deux traits consécutifs D, D' du limbe étant de 5', on règle le microscope de manière que l'intervalle dd' des images de deux traits comprenne cinq crans du peigne. Alors le tour de vis vaut 1', et une partie du tambour vaut 1". On estime aisément les dixièmes de partie ou de seconde.

La seule précaution à prendre est d'éclairer le limbe par des rayons bien perpendiculaires. Pour cela, chaque microscope porte, sous l'objectif, un petit miroir chargé de refléter la lumière d'une lampe qui sert aussi à éclairer pendant la nuit le champ de la lunette.

Ordinairement on place six microscopes équidistants autour du limbe. Lorsqu'on veut obtenir la direction actuelle de la lunette, on lit leurs six indications et on en prend la moyenne. Cette direction est comptée, il est vrai, à partir d'une origine arbitraire; pour mesurer la distance zénithale d'un astre à son passage au méridien, il faut donc commencer par déterminer, sur le cercle mural, la direction du zénith.

Lieu du zénith.

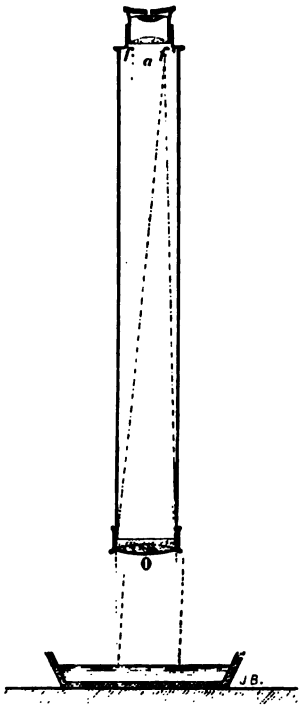
La lunette étant dirigée à peu près verticalement, l'objectif en bas, on place sous l'objectif un bain de mercure dont la surface réalise un miroir parfaitement plan et horizontal. On voit ainsi par réflexion, sur ce miroir, le réticule de la lunette (1).

Si la ligne de visée fO (*fig.* 65) n'est pas bien verticale, l'image f' de la croisée des fils ne coïncidera pas avec f. L'écart ff' sera double de l'inclinaison de cette droite. Pour rendre celle-ci

(1) Pourvu que l'oculaire soit muni d'un petit réflecteur destiné à éclairer vivement les fils ou plutôt le champ de la lunette.

verticale, il suffira de faire tourner un peu la lunette jusqu'à ce que f' coïncide avec f; pour cela on fixera le limbe au pilier par

Fig. 65.



une mâchoire, et on agira sur la tête de vis qui sert à imprimer à la lunette des mouvements doux. Si, à ce moment, on lit les six verniers, leur moyenne donnera la direction du nadir, et on aura celle du zénith en lui ajoutant 180°.

Soit u_0 la lecture du cercle quand la lunette est pointée sur le zénith, u la lecture obtenue quand on a visé une étoile, ε_0 et ε les erreurs des traits correspondants, on aura

$$z = u - u_0 + \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Ce n'est encore que la distance zénithale apparente ; on doit lui ajouter la réfraction, et par suite on aura soin de noter les indications t et b du thermomètre aérien et du baromètre.

Rectification du cercle mural.

L'axe doit être horizontal. Comme il est caché dans l'épaisseur du pilier, on rend le limbe vertical au moyen d'un fil à plomb, en agissant au besoin sur des vis placées à l'extrémité de l'axe. La ligne de visée doit être perpendiculaire à l'axe de rotation. On peut se servir pour cela de deux collimateurs opposés qu'on place horizontalement à droite et à gauche, et sur lesquels on pointe alternativement la lunette. On rectifie la ligne de visée en déplaçant convenablement le réticule dans son plan, à l'aide de deux vis opposées. Enfin, le plan vertical décrit par la ligne de visée doit coïncider avec le méridien du lieu. A cet effet, on dirige la lunette sur une étoile circumpolaire et on note l'heure sidérale de son passage par la croisée des fils. Cette heure doit être égale à l'Æ de cette étoile. S'il en était autrement, on corrigerait l'axe en agissant sur deux vis contraires, horizontalement disposées à l'une de ses extrémités. Ces rectifications n'ont pas besoin d'être faites avec la même précision que celles de la lunette méridienne.

Le réticule se compose de deux fils en croix, l'un dans le méridien, l'autre perpendiculaire au premier et, par suite, horizontal. C'est sur ce dernier qu'il faut amener l'image de l'étoile qu'on observe.

On emploie souvent un fil mobile, parallèle au fil horizontal ; mais alors il faut ajouter, à la lecture du cercle, le petit angle qu'on a fait parcourir à ce fil pour l'amener sur l'astre observé à son passage au méridien ; cet angle est mesuré par une vis micrométrique fixée près de l'oculaire.

Extrait du registre des observations faites au cercle mural de Paris.

NOM de l'astre observé.	BAROMÈTRE et THERMOMÈTRE.	MOYENNE des six microscopes.	DISTANCE zénithale apparente. $u_0 - u$.	RÉFRACTION.	DISTANCE zénithale vraie.	DISTANCE polaire conclue. $\delta = z_m + \lambda$.	OBSERVATEUR.
			1er septembre 1880.				
Soleil bord supérieur.	766mm,6 23°,4	334°.29′.26″,8	40°.29′.53″,9	47″,8	40°.30′.41″,7	81°.40′.28″,2	F.
♀ Centre	24°,2	330. 9.28,5	44.49.52,2	55,4	44.50.47,6	86. 0.34,1	F.
Nadir		194.59.20,7	$u_0 = 14°59'20'',7$				F.
Polaire, P. I.	25°,1	57.27.59,9	−42.28.39,2	−51,0	−42.29.30,2	− 1.19.43,7	F.
η Grande Ourse		16. 3.48,4	− 1. 4.27,7	− 1,1	− 1. 4.28,8	40. 5.17,7	F.
η Bouvier		345. 9.31,1	29.49.49,6	+31,9	29.50.21,5	71. 0. 8,0	F.
Arcturus	766mm,3 24°,8	345.57.59,8	29. 1.20,9	+30,9	29. 1.51,8	70.11.38,3	F.
ε² Bouvier		353.44.18,2	21.15. 2,5	+21,7	21.15.24,2	62.25.10,7	F.
β Bouvier		7. 1. 8,8	7.58.11,9	+ 7,8	7.58.19,7	49. 8. 6,2	F.
δ Bouvier	766mm,3 24°,7	359.55.11,7	15. 4. 9,0	+15,0	15. 4.24,0	56.14.10,5	F.

On a attribué à λ la valeur 41°9′46″,5.

Réduction au méridien.

Lorsque l'étoile est ondulante, il se passe quelque temps avant qu'on ait saisi le milieu de ces petites oscillations. L'observation n'étant pas faite au méridien même, il faut noter l'heure H à laquelle le pointé a été effectué pour être en état de calculer une petite réduction au méridien.

L'astre a pour angle horaire, à cet instant, H — $\mathcal{A}$; et comme il se

Fig. 66.

trouve sur le fil *ef* (*fig.* 66), c'est-à-dire sur un arc de grand cercle perpendiculaire au méridien, sa distance polaire conclue serait P*f*, laquelle diffère, de la véritable P*e'*, du petit arc *fe'* = P*e* — P*f*. Le triangle rectangle P*ef* donne

$$\operatorname{tang} Pf = \operatorname{tang} Pe \cos \mathcal{A}H,$$

d'où, en mettant δ pour P*e*,

$$Pe - Pf = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\mathcal{A}H \sin 2\delta - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\mathcal{A}H \sin 4\delta + \ldots,$$

relation dont le second nombre, multiplié par 206 265″, donne la réduction cherchée.

Elle n'est pas la même que pour le théodolite; cela tient à ce que, si l'astre est observé hors du méridien, le cercle mural n'en donne pas la distance zénithale, mais seulement la projection de cette distance sur le méridien.

Détermination de λ.

La constante λ qui intervient dans tous ces calculs se détermine, une fois pour toutes, par les circumpolaires observées à leurs deux passages P.S. et P.I. L'instrument ayant donné, pour une de ces étoiles, les distances zénithales z et z' que nous supposerons corrigées de la réfraction, on en déduit

$$\text{P.S.}\ldots \quad \delta = \lambda + z,$$
$$\text{P.I.}\ldots - \delta = \lambda - z',$$

d'où

$$\lambda = \frac{z + z'}{2}, \quad \delta = \frac{z' - z}{2}.$$

Nous reprendrons plus loin cette question, à propos de l'étude de la réfraction.

Corrections instrumentales.

Il est aisé de maintenir les défauts de rectification du cercle mural dans des limites assez étroites pour qu'il n'y ait pas lieu d'en tenir compte par le calcul. Il ne reste donc à considérer que les erreurs de division et les déformations dues à l'élasticité des pièces soumises à l'action de la pesanteur. Les astronomes ne se contentent pas d'éliminer en grande partie les erreurs de division par l'emploi de six micromètres équidistants : ils déterminent trait par trait ces erreurs, de manière à en tenir compte d'une manière tout à fait exacte. Quant à la flexion des diverses pièces, le problème est trop compliqué pour être directement abordable.

La seule ressource consiste à mesurer avec l'instrument des angles parfaitement connus, et à examiner si l'on en obtient bien ainsi les véritables valeurs. Les effets de la flexion variant périodiquement avec la direction de la lunette, c'est-à-dire avec la lecture u, on peut les représenter empiriquement par la série de Fourier et remplacer la lecture légèrement faussée u par la lecture exacte

$$u + a \sin(u + A) + b \sin 2(u + B) + \ldots.$$

Supposons que la lecture u réponde à la direction horizontale, u' à la direction du nadir, u'' à une deuxième direction horizontale

opposée à la première. Ces trois lectures corrigées seront, en remarquant que $u' = u + 90^\circ$ et $u'' = u + 180^\circ$ à très peu près,

$$u + a\sin(u + A) + b\sin 2(u + B) + \ldots,$$
$$u' + a\cos(u + A) - b\sin 2(u + B) + \ldots,$$
$$u'' - a\sin(u + A) + b\sin 2(u + B) + \ldots.$$

On en déduit les deux relations

$$u'' - u - 2a\sin(u + A) = 180^\circ,$$
$$u'' + u - 2u' - 2a\cos(u + A) = 0,$$

lesquelles feront connaître les constantes a et A du premier terme correctif. Pour déterminer pareillement les constantes du deuxième terme, il faudrait mesurer un nouvel angle de 45°.

Bessel, qui a étudié cette question d'une manière très approfondie, pensait que, pour éliminer l'influence de la pesanteur, il fallait employer un instrument susceptible de retournement et observer deux fois la même étoile, directement et par réflexion sur un horizon de mercure, dans la première position; puis recommencer les mêmes observations dans la deuxième.

La moyenne de ces quatre mesures serait indépendante de toute flexion. Il est aisé de voir qu'on n'élimine ainsi que le premier terme de la série précédente et nullement le deuxième. Toujours est-il que les astronomes ont été conduits par là à revenir aux instruments susceptibles de retournement, qui leur paraissent plus propres à une étude complète que le cercle mural.

Erreur personnelle de l'observateur.

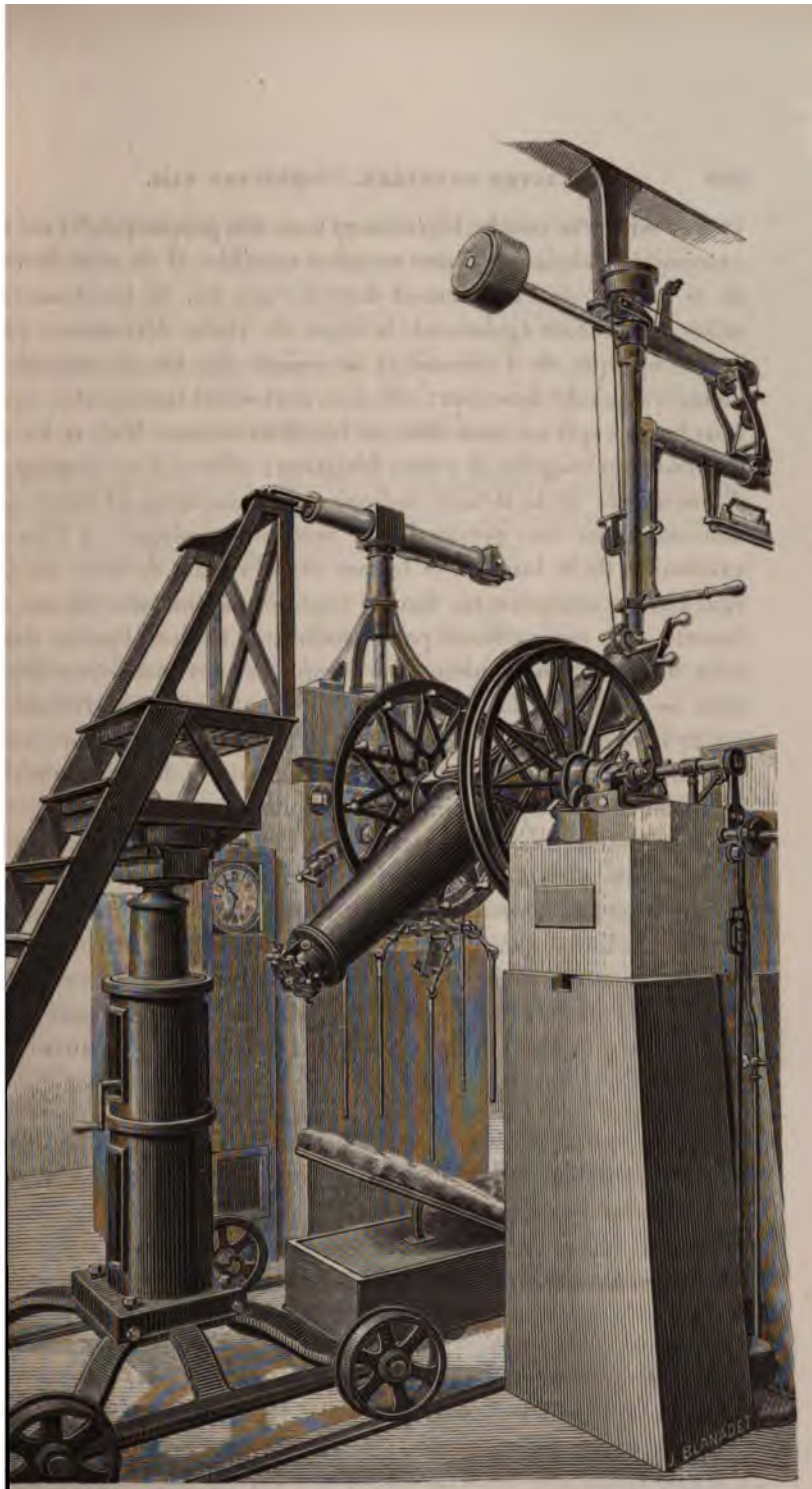
Ici le rôle de l'observateur est bien réduit; il s'agit de placer l'étoile observée au milieu de l'intervalle de deux fils parallèles et horizontaux. Le mouvement diurne de l'étoile n'intervient pas; il n'y a que les ondulations dues à la réfraction qui gênent le pointé. Néanmoins, dès que nos sens sont en jeu, il faut se méfier. Tracez sur un papier deux traits parallèles et placez à vue, entre eux, un point à égale distance de ces deux droites; lorsque vous serez satisfait de ce genre de pointé, renversez la feuille de manière à mettre le haut en bas, et examinez si le point que vous y avez marqué dans la première position vous paraît encore au milieu. Vous y trou-

verez peut-être une petite erreur provenant d'un certain défaut de l'œil et dont l'effet est doublé par ce renversement. Ce défaut se retrouvera dans toutes les distances zénithales ainsi observées, mais avec un sens différent suivant qu'il s'agira d'étoiles observées au sud ou d'étoiles observées au nord. Pour les étoiles zénithales, il se retrouvera encore suivant que l'observateur, couché sur le dos pour pointer à l'étoile, aura les pieds au nord ou les pieds au sud. Pour se débarrasser de cette erreur de pointé entre deux fils, on réduit le réticule à un seul fil horizontal qui doit bissecter l'image de l'étoile; mais ici encore l'erreur personnelle se reproduit lorsque l'étoile a un disque factice un peu grand, ou lorsqu'elle ondule au-dessus et au-dessous du fil, ou lorsqu'au contraire l'étoile est masquée entièrement par le fil. Toutes ces difficultés disparaissent par l'emploi de la photographie, qui supprime entièrement l'observateur.

Cercle méridien. Flexion des lunettes.

On nomme ainsi un instrument, aujourd'hui très répandu dans les observatoires, qui réunit le cercle mural et la lunette méridienne. Il a l'avantage de permettre à un seul observateur de déterminer à la fois l'Æ et le δ de chaque astre à son passage au méridien. Mais l'instrument est beaucoup plus compliqué, plus lourd, les flexions y sont plus fortes, la stabilité moindre, et surtout l'observateur, plus pressé, doit donner son attention à deux choses fort différentes, le pointé entre deux fils horizontaux et l'appréciation de l'instant du passage par les fils verticaux. On perd ainsi tous les avantages de la division du travail et de la simplification des instruments. Mais, comme le travail produit est plus grand et plus régulier, on emploie en général cet instrument pour les observations méridiennes qui n'ont pas besoin de la plus extrême précision, et on réserve la lunette méridienne et le cercle mural, ou mieux le cercle vertical susceptible de retournement, pour la délicate détermination des étoiles fondamentales et des constantes de l'Astronomie.

Dans un cercle méridien, la lunette n'est plus fixée au limbe aux deux extrémités, comme dans le cercle mural; elle n'est portée par l'axe qu'en son milieu. La flexion est donc plus grande et exige une étude particulière. Il ne faut pas la confondre avec ce qu'on appelle de ce nom en Mécanique. Une pièce de bois ou de métal supportée



67. — Cercle méridien, donné par M. Bischoffsheim à l'Observatoire de Paris.

en son milieu se courbe légèrement sous son propre poids ; ses deux extrémités s'abaissent d'une manière sensible. Il en sera de même de la lunette de l'instrument dont il s'agit ici. Si les deux extrémités s'abaissent également, la ligne de visée, déterminée par le centre optique de l'objectif et la croisée des fils du réticule, ne changera pas de direction ; elle sera seulement transportée un peu plus bas, ce qui est sans effet sur les observations. Mais si les deux flexions sont inégales, il y aura déviation ; celle-ci n'est donc qu'une différentielle de la flexion ordinaire. Représentons la force qui la détermine par une petite droite verticale appliquée à l'une des extrémités de la lunette, et faisant avec la ligne de visée un angle égal à z. Sa composante, dans le sens perpendiculaire à l'axe de la lunette, sera seule efficace pour produire la flexion ; l'autre, dans le sens de l'axe, tend seulement à comprimer les matériaux dont le tube se compose. La première composante est proportionnelle à $\sin z$; il en sera donc de même de l'effet produit. Dès lors on voit que la flexion doit varier comme le sinus de la distance zénithale. Nulle au zénith, elle atteint son maximum f à l'horizon.

Pour déterminer la constante de l'expression $f \sin z$, on emploie deux collimateurs horizontaux opposés sur lesquels on pointe alternativement la lunette du cercle méridien. Soient u la lecture du limbe dans la première position, u' la lecture dans la position diamétralement opposée. Pour corriger ces lectures de la flexion, il faut écrire $u + f$, $u' - f$, puisque les deux z sont égaux à $90°$ et à $-90°$. Leur différence devant être de $180°$, on aura

$$u' - u - 2f = 180°,$$

équation qui fera connaître f en grandeur et en signe. Dès lors toutes les distances zénithales ainsi obtenues devront recevoir la correction $f \sin z$ [1].

Détermination simultanée de la colatitude et des constantes de la réfraction.

Il faut, comme on l'a vu, se tourner vers le nord, et observer une série d'étoiles circumpolaires à leurs passages supérieurs et infé-

[1] On possède aujourd'hui, pour l'étude complète de la flexion, une méthode et un appareil dus à M. Lœwy.

rieurs. En désignant par z_1 et z'_1 les distances zénithales d'une même étoile, on a

$$2\lambda = z_1 + \rho + f \sin z_1 + z'_1 + \rho' + f \sin z'_1.$$

La réfraction étant de la forme (p. 118)

$$\alpha \operatorname{tang} z_1 - \beta \operatorname{tang}^3 z_1.$$

si nous désignons par $\partial\lambda$, $\partial\alpha$, $\partial\beta$ les corrections à ajouter aux valeurs approchées λ', α', β' de ces constantes, on formera, par chaque étoile circumpolaire, une équation de condition

$$N + 2\partial\lambda - \partial\alpha(\operatorname{tang} z_1 + \operatorname{tang} z'_1) + \partial\beta(\operatorname{tang}^3 z_1 + \operatorname{tang}^3 z'_1) = 0,$$

équation où les coefficients de $\partial\alpha$ et de $\partial\beta$ doivent être multipliés par les facteurs relatifs au baromètre et au thermomètre.

En traitant ces équations par la méthode des moindres carrés, on aura les valeurs les plus probables des inconnues, et par suite celles des constantes λ, α, β. Puis on remplacera, dans ces équations, les inconnues par leurs valeurs; les résidus donneront une idée nette du degré de précision des observations et des résultats conclus, pourvu qu'aucune erreur systématique ne s'y soit introduite.

Comme la formule de ρ n'est valable que jusqu'à 79° de distance zénithale, on aura soin de ne pas employer d'étoiles qui dépassent cette distance-là à leur passage inférieur. Il faut réserver ces étoiles pour soumettre les théories de la réfraction au contrôle de l'observation, dans la partie où elles commencent à dépendre d'une hypothèse plus ou moins gratuite sur la constitution de l'atmosphère.

Il est essentiel d'employer dans ces calculs la vraie température de l'air. Une erreur de 1° produirait une altération sensible dans les résultats, et particulièrement dans la valeur conclue de λ. Il faut que la température de la salle d'observation soit la même que celle de l'air extérieur, et que le thermomètre soit soustrait aux radiations du sol ou des corps voisins. Enfin sa graduation et son zéro doivent être contrôlés avec soin.

Ici se présente une vérification précieuse, mais fort délicate. Au sud du zénith, les distances zénithales du Soleil, vers les deux solstices, donnent également λ, ainsi que nous le verrons plus loin, pourvu qu'on opère sur un très grand nombre d'observations. La

flexion, l'erreur personnelle de l'observateur, l'influence de la réfraction agissant alors en sens contraire, l'accord des deux valeurs de λ obtenues au sud et au nord sera une garantie considérable. Leur désaccord indiquerait la présence de causes d'erreurs dont il faudrait se préoccuper.

En Géodésie, où l'on a pour but unique de déterminer λ, on observe à la fois au sud et au nord, mais seulement des étoiles fondamentales. En prenant la moyenne de mesures faites ainsi à pareille distance du zénith, on élimine l'effet des petites erreurs dont nous venons de parler.

Travaux d'un observatoire.

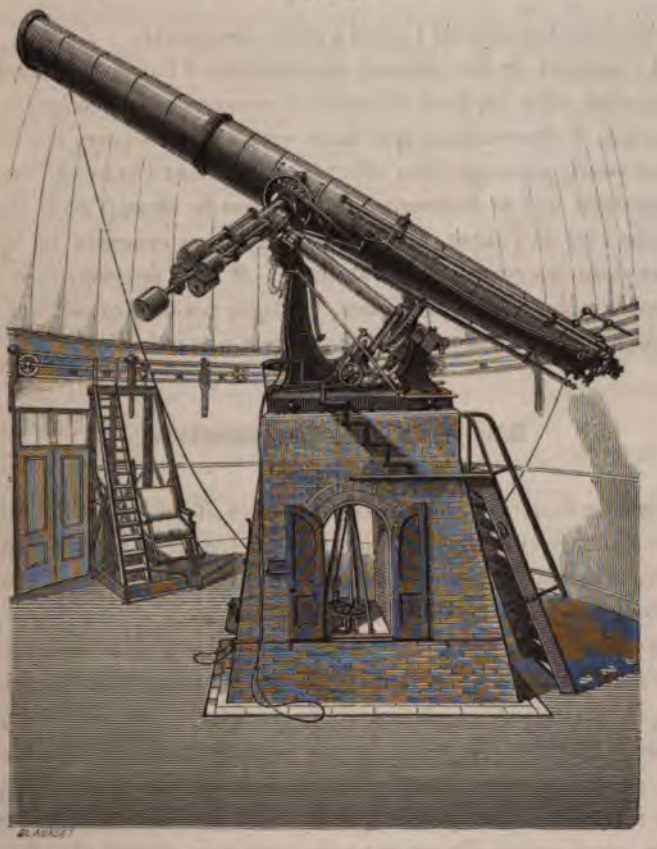
Les observations méridiennes sont la base de l'Astronomie. La règle est d'observer le Soleil, la Lune et les planètes à leur passage au méridien *en toute occasion,* et de comparer ces observations à la théorie, c'est-à-dire aux positions de ces astres que la *Connaissance des Temps* publie annuellement, d'après les Tables astronomiques fondées sur la théorie de l'attraction. Ce travail doit être continué indéfiniment, de jour en jour, d'année en année, de siècle en siècle. Il a pour but de fournir les éléments nécessaires au perfectionnement incessant de la théorie. Les plus grandes découvertes sont dues à la persévérance avec laquelle les observations méridiennes ont été conduites, depuis deux siècles, dans les Observatoires de Greenwich et de Paris.

Les astronomes observent aussi chaque jour un certain nombre d'étoiles de toute grandeur, afin d'en déterminer les coordonnées $\mathcal{A}$ et δ. Ils en forment des Catalogues qui donnent ces coordonnées pour une certaine date. Tels sont le Catalogue de Bradley, contenant 5000 étoiles jusqu'à la 6e grandeur, le Catalogue de 9000 étoiles de Lacaille pour le ciel austral, celui de Piazzi, celui de Lalande qui comprend 30 000 étoiles, etc. Aujourd'hui le nombre des petites étoiles ainsi catalguées en Allemagne et en Amérique s'élève à 300 000.

Ces étoiles servent de points de repère pour les observations extra-méridiennes des comètes et des petites planètes qui sont rarement observables à leurs passages au méridien. L'équatorial, dont

a vu plus haut une courte description et dont voici la figure, rmet d'observer ces astres dans une région quelconque du ciel, urvu qu'il s'y trouve des étoiles connues, pour servir de terme comparaison. Par la nature même des axes de cet instrument,

Fig. 68.



nt le principal doit être obliquement dirigé vers le pôle, le réti-le de la lunette, prise dans une position quelconque, se projette r le ciel suivant deux arcs de grand cercle rectangulaires, dont l'un le méridien céleste du point visé, et l'autre est tangent au pa-lèle céleste de ce même point. Ils forment ainsi deux axes de ordonnées tout orientés pour les mesures des différences en Æ et δ. Ces mesures s'exécutent à l'aide de fils mobiles placés dans

le réticule et mus par des vis micrométriques. Soient $Æ'$ et δ' les coordonnées de l'étoile de comparaison fournies par un Catalogue, $(Æ)$ et (δ) les différences mesurées à une certaine époque à l'aide du fil mobile, on aura

$$Æ' + (Æ) \text{ et } \delta' + (\delta)$$

pour les coordonnées de l'astre à cette époque-là.

S'il s'agissait de les obtenir directement à l'aide des cercles de l'équatorial, elles seraient affectées d'erreurs grossières; mais, dans le système d'observations que nous venons d'indiquer, ces erreurs disparaissent, parce qu'elles affectent également l'astre et l'étoile de comparaison qui se trouvent à la fois dans le champ de la lunette, très près l'un de l'autre. Il n'y a donc guère à craindre ici que les erreurs dont les coordonnées stellaires $Æ'$ et δ' peuvent être affectées, mais celles-ci sont minimes, puisque ces étoiles ont été antérieurement déterminées par des observations méridiennes.

Rôle des étoiles fondamentales.

Parmi les étoiles servant ainsi de repère, il en est qu'on ne cesse jamais d'observer et dont les positions se trouvent aujourd'hui connues avec la plus extrême précision. Ce sont les étoiles fondamentales dont nous avons déjà parlé très souvent.

Dans la pratique journalière des observatoires, on ne saurait déterminer à tout instant les erreurs instrumentales avec la précision requise, et cependant les observations essentielles ne doivent jamais être interrompues. Pour satisfaire à ces conditions, l'astronome observe, en même temps que le Soleil, la Lune ou les planètes, plusieurs étoiles fondamentales qui se trouvent dans la même région céleste, ainsi qu'on l'a vu dans le spécimen donné plus haut des registres de l'Observatoire de Paris. Comme les erreurs instrumentales, toujours très faibles, affectent au même degré les astres observés et les étoiles de comparaison, ces erreurs disparaissent dans les différences. Ainsi, en déterminant la correction de la pendule par les étoiles du Bouvier, le 1er septembre 1880, et en appliquant cette correction aux passages observés du Soleil, de la Lune, de Mercure ou de Vénus pour obtenir leurs $Æ$, le résultat ne dépend

plus des instruments, mais de l'exactitude des fondamentales. Il en sera de même des petites étoiles qu'on aura observées ce jour-là dans la même région.

La détermination de ces étoiles fondamentales, dont la première institution régulière remonte à 4000 ans (Astronomie chinoise), est l'œuvre la plus délicate des grands observatoires. Elle exige, en premier lieu, une connaissance approfondie de toutes les causes naturelles qui font varier leurs coordonnées, les mouvements propres, la précession, la nutation, l'aberration et la parallaxe annuelle. Ajoutez-y la réfraction, quand il s'agit des distances polaires. Les erreurs instrumentales elles-mêmes, telles que la marche diurne de la pendule, l'inclinaison et l'orientation de l'axe de la lunette méridienne, les flexions, etc., doivent être étudiées avec un soin tout particulier. Or ces erreurs n'ont pas toute la fixité qu'on leur suppose ordinairement; elles varient avec le temps, suivant des lois mal connues; elles dépendent principalement des changements diurnes et annuels de la température. Malgré le soin qu'on met à les déterminer fréquemment, on ne peut espérer d'en connaître la valeur exacte à tout instant.

Voici, pour fixer les idées, un exemple bien simple. Malgré la compensation du pendule de l'horloge astronomique, il y a tout lieu de croire qu'il y reste encore quelque défectuosité. Les variations diurnes et annuelles de la température doivent donc exercer une certaine influence sur la marche de l'horloge, marche que nous avons traitée comme une constante dans la formule

$$H = h + \varepsilon + (t' - t)m.$$

Or la température diurne présente une variation périodique susceptible d'être exprimée par le sinus de l'heure comptée à partir d'une certaine origine, c'est-à-dire par l'expression

$$\theta \sin(H - \alpha).$$

Comme $H = \text{Æ}$ au méridien, on voit que les ascensions droites des étoiles fondamentales, en les supposant déterminées par une série d'observations méridiennes de vingt-quatre heures et réduites d'après la première formule, présenteront une anomalie, exprimée par la seconde, dont il est à peu près impossible de tenir compte directement. Cette anomalie, de nature sinusoïdale, aura pour effet

de rapprocher les étoiles les unes des autres en ascension droite dans une certaine région du ciel, et de les écarter les unes des autres dans la région opposée.

Il n'y a qu'une manière d'éliminer une telle cause d'erreur, c'est de prendre, pour chaque étoile, la moyenne des Æ observées pendant une année entière. Comme le jour sidéral diffère d'environ $3^m 56^s$ du jour solaire, au bout d'une année une étoile quelconque, observée chaque jour et ayant naturellement passé au méridien à la même heure sidérale, aura passé successivement au méridien à toutes les heures solaires. Or l'anomalie en question, due aux variations de la température, se règle sur l'heure solaire et non sur l'heure sidérale; son influence sur l'Æ d'une étoile quelconque passera donc, en un an, par toutes les valeurs que peut prendre un sinus, valeurs dont la somme est rigoureusement nulle. Ainsi elles se neutraliseront complètement dans le cours d'une année. Il en sera de même de toutes les causes d'erreur ayant la même période et, par exemple, du phénomène des parallaxes annuelles, d'une petite erreur sur la constante de l'aberration, etc.

Mais, pour suivre en toute saison et à toutes les heures solaires une étoile à ses passages au méridien d'un lieu quelconque, il faut qu'elle soit observée en plein jour aussi bien qu'en pleine nuit. On est donc obligé de choisir les étoiles fondamentales parmi les plus belles étoiles, de la première à la troisième grandeur. Autrefois les astronomes n'en avaient adopté que vingt. Leur nombre a été en croissant; aujourd'hui il y en a près de trois cents, dont les positions sont calculées et publiées d'avance dans les éphémérides, de dix en dix jours. Mais celles qui ne peuvent être observées d'une manière continue, pendant le jour aussi bien que pendant la nuit, ne méritent pas véritablement le nom de *fondamentales*.

Ce que nous venons de dire des Æ compte pareillement pour les δ. La réfraction calculée a bien aussi ses variations provenant de causes météorologiques. On ne les élimine qu'en continuant d'observer pendant toute la période assignable à ces causes, c'est-à-dire pendant une année entière.

Enfin les étoiles ont leurs petits mouvements propres qu'on ne saurait déterminer qu'en comparant des observations faites à de grands intervalles de temps.

Malgré tout, les positions des étoiles fondamentales, données

par les observatoires principaux qui s'occupent de leur détermination, présentent entre elles de petites différences qui indiquent la limite de précision qu'on n'a pu encore dépasser par les moyens actuels. Il faudrait, pour aller au delà, de nouvelles méthodes dont l'adoption est réservée à l'avenir.

Terminons par une dernière remarque. Les erreurs personnelles des observateurs n'interviennent pas dans ces divers Catalogues si l'on a la précaution de ne combiner entre elles, en un même jour, que les observations dues à un même observateur. En effet, cette erreur étant constante, tant que l'observateur ne change pas, elle disparaît dans les différences d'Æ observées par le même individu.

LIVRE TROISIÈME.

THÉORIE DES ERREURS.

On fait des mesures, soit pour déterminer certains éléments que la science rattache par une expression mathématique aux phénomènes observés, soit pour vérifier cette loi elle-même. Quel que soit le but qu'on se propose, il ne faut pas oublier que nos mesures n'ont jamais une exactitude parfaite; et comme les petites erreurs inévitables dont elles sont affectées doivent exercer une certaine influence sur les conclusions qu'on en tire, il est nécessaire de s'en rendre compte, dans le premier cas pour connaître le degré de précision avec lequel ces mesures donnent le résultat cherché, dans le second cas pour savoir si les discordances qui se manifesteront toujours entre la théorie et l'observation tiennent aux observations ou bien à la théorie.

Nous ferons remarquer, sur ce second point, que c'est invariablement par ce genre de discussion que la science progresse. Toutes les grandes découvertes astronomiques, celles de la précession, de la nutation, de l'aberration, des principales inégalités périodiques ou séculaires de la Lune et des planètes ont été faites ainsi. Les lois de Kepler elles-mêmes, ces bases de l'Astronomie solaire, sont sorties d'une discussion de ce genre. Les discordances entre les théories anciennes et les observations de Tycho Brahe ne dépassaient pas 8′, écart assez faible pour des observations faites à l'œil nu; c'est cependant pour les faire disparaître qu'il a fallu réformer toute l'Astronomie, et cela parce qu'il était impossible de les attribuer aux mesures si précises de l'observateur danois.

Le premier pas à faire dans cette étude est de distinguer entre les erreurs accidentelles ou fortuites qui tiennent à l'observateur

et les erreurs systématiques qui tiennent à une cause assignable ou à une fausse théorie. C'est un fait d'expérience mille et mille fois vérifié que les premières ne suivent aucune loi; elles sont indifféremment positives ou négatives; les petites erreurs sont de beaucoup les plus nombreuses; enfin les plus fortes, relativement très rares, ne dépassent jamais certaines limites assignables.

Les secondes, au contraire, ont une marche régulière qui décèle leur origine. On a vu combien nous avons insisté sur les erreurs instrumentales, sur la réfraction, etc. Les causes étaient connues: nous avons cherché leurs lois et donné le moyen d'en purger les observations. Ainsi la réfraction diminue les distances zénithales proportionnellement à leurs tangentes; l'excentricité d'un cercle affecte les angles mesurés proportionnellement au sinus de ces mêmes directions comptées à partir d'une certaine origine, etc. Maintenant nous allons suivre la marche inverse et montrer comment on peut découvrir, en discutant les observations, la loi et même la cause des erreurs systématiques dont elles sont affectées.

CHAPITRE IX.

ERREURS SYSTÉMATIQUES.

Recherche expérimentale d'une cause d'erreur.

Voici une série d'observations méridiennes faites à Paris, au nord du zénith, pour déterminer la colatitude. On sait d'avance qu'avec l'instrument employé l'erreur à craindre sur une distance zénithale n'est guère que de 0″,5. Voici les résultats :

Distances polaires des étoiles observées.	λ conclu.	Écarts (moy. — obs.).
+ 31°	41°. 9′. 48″,2	+ 1″,0
— 20 Passage inférieur.	46,5	+ 0,9
+ 41	49,1	— 1,7
— 33 P. I.	45,7	+ 1,7
+ 1	46,8	+ 0,6
— 19	48,1	+ 0,7
— 10	47,9	+ 0,5
— 12 P. I.	41. 9. 46,7	— 1,7
Moyenne...	41. 9. 47,4	

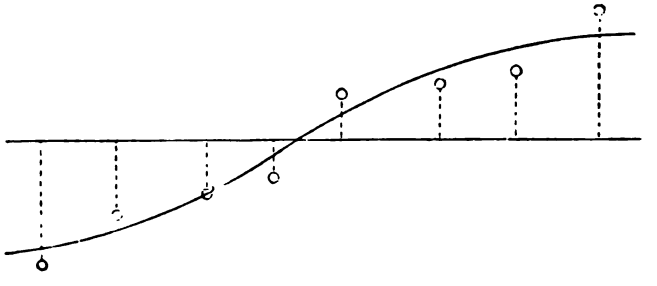
Les signes des écarts paraissent être indifféremment + et —, mais leur grandeur dépasse de beaucoup les limites ordinaires. Il y a donc lieu d'examiner s'il n'y aurait pas ici quelque erreur systématique. Comme $\lambda = \delta + z$ et que les δ des étoiles employées sont très exacts, c'est sur les z qu'il faut porter notre attention. Rangeons donc ces écarts dans l'ordre des distances zénithales.

z.	λ.	Écarts.
0°.....	41°. 9'.49",1	— 1",7
10.....	48,2	— 1,0
22.....	48,1	— 0,7
31.....	47,9	— 0,5
40.....	46,8	+ 0,6
53.....	46,7	+ 0,7
63.....	46,5	+ 0,9
74.....	41. 9.45,7	+ 1,7

Ainsi, plus les étoiles observées sont loin du zénith, plus le λ conclu est petit. Pour découvrir la loi de l'erreur systématique dont ces mesures sont évidemment affectées, construisons la courbe des écarts en prenant pour abscisses les z.

Cette courbe ayant assez l'air d'une sinusoïde, la loi de l'erreur

Fig. 69.



sera de la forme $\alpha \sin z$, ce qui indiquerait une très notable flexion dans la lunette. Pour le vérifier on détermine immédiatement cette flexion par deux collimateurs horizontaux, et on trouve effectivement $\alpha = + 3''$. En ajoutant la correction $3'' \sin z$ aux λ précédents, on forme ce tableau :

λ observé.	Flexion.	λ corrigé.	Écarts (moy. — obs.).
41°. 9'.49",1	+ 0",0	41°. 9'.49",1	— 0",1
48,2	0,5	48,7	— 0,3
48,1	1,1	49,2	— 0,2
47,9	1,5	49,4	— 0,4
46,8	1,0	48,7	— 0,3
46,7	2,4	49,1	— 0,1
46,5	2,7	49,2	— 0,2
41. 9.45,5	+ 2,9	41. 9.48,6	— 0,4
	Moyenne...	41. 9.49,0	

Les écarts n'ont plus de marche régulière et ne sortent plus des limites de la précision habituelle pour des instruments de premier ordre; ce sont probablement des erreurs accidentelles.

Second exemple. — Pour étudier certaines anomalies qui se présentent dans les observations stellaires, on a choisi γ du Dragon parce que cette étoile est très voisine du zénith (à Greenwich) et qu'il n'y a pas à craindre l'incertitude de la réfraction.

Voici une série de mesures continuée pendant une année entière, de mois en mois.

Dates.	δ observés.	Écarts (obs. — moy.).	t en jours.
31 décembre	38°.39'.54",1	+ 5",4	0
30 janvier	62,5	+ 13,8	30
29 février	69,2	+ 20,5	60
30 mars	69,2	+ 20,5	90
29 avril	64,0	+ 15,3	120
29 mai	54,9	+ 6,2	150
28 juin	44,1	− 4,6	180
28 juillet	36,8	− 11,9	210
27 août	30,3	− 18,4	240
26 septembre	28,8	− 19,9	270
26 octobre	31,4	− 17,3	300
25 novembre	38.39.39,1	− 9,6	330
4 janvier	38.39.52,2	+ 3,5	370
Moyenne des douze premiers	38.39.48,7		

Les écarts avec la moyenne de l'année varient de la manière la plus régulière avec le temps. Pour en découvrir la loi, nous prendrons le temps pour abscisse et les écarts pour ordonnées. La courbe obtenue est évidemment une sinusoïde. Le phénomène est donc périodique, ce qu'on vérifierait en poursuivant les observations: la période est d'une année et l'expression mathématique de la loi est, par à peu près,

$$\delta - \delta' = 20'' \sin 59',1(t + 17),$$

en désignant par δ' la distance polaire moyenne, par t le temps exprimé en jours.

Est-il possible de remonter, de cette loi, à la cause des variations que subit ainsi périodiquement la distance polaire de cette étoile?

Les astronomes qui ont remarqué, les premiers, ces singuliers écarts ont pensé tout d'abord à l'illusion produite par la circulation annuelle de la Terre autour du Soleil. Il est certain, en effet, que les deux périodes, celle de cette circulation et celle des variations du δ de cette étoile, étant les mêmes, les deux phénomènes sont en relation de cause à effet. Nous avons dit que cette illusion consiste en ce que chaque étoile doit paraître décrire en un an, autour de sa position moyenne, une orbite égale et parallèle à celle de la Terre. Mais nous verrons plus tard, en appliquant le calcul à cette question, que, pour γ du Dragon, les variations de δ dues à cette parallaxe annuelle auraient pour expression

$$\delta - \delta' = -k \cos 59',1(t + 17),$$

k étant un très petit coefficient. Le phénomène que nous étudions n'est donc pas imputable à cette cause; car, lorsque $\delta - \delta'$ devrait croître sous son influence, l'observation montre qu'il va au contraire en décroissant et prend même un signe contraire.

Ce phénomène périodique a pris une importance énorme lorsqu'on s'est aperçu que toutes les étoiles le présentaient avec la même période annuelle et avec des caractères analogues. Ce n'est assurément qu'une apparence; mais, bien que nous en ayons trouvé expérimentalement la loi, il nous manque, pour remonter à la cause, des notions que l'étude du système solaire nous donnera plus tard.

En tout cas, les erreurs accidentelles se manifestent ici par l'impossibilité de faire passer la sinusoïde par tous les points observés; les écarts sont tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, et presque tous fort petits. Ce sont ces erreurs accidentelles que nous allons étudier, en supposant que les observations à discuter aient été préalablement purgées de toute erreur systématique provenant des instruments ou de toute autre cause.

CHAPITRE X.

THÉORIE DES ERREURS ACCIDENTELLES.

Examinons d'abord le cas le plus simple, celui où l'on a mesuré directement une grandeur x pour laquelle on a obtenu les évaluations $n, n', n'', \ldots$ en nombre m. C'est comme si l'on devait déterminer x de manière à satisfaire le mieux possible aux m équations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= n, \\ x &= n', \\ x &= n'', \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si ces mesures ne sont affectées que d'erreurs purement accidentelles, celles-ci seront indifféremment positives ou négatives ; en outre, les plus nombreuses, de beaucoup, seront les plus petites. Il en résulte qu'en prenant la moyenne des mesures il y aura une large compensation de ces erreurs. Si par hasard il se trouvait quelque grosse erreur (grosse dans les limites admissibles, bien entendu) qui ne fût pas entièrement annulée par une erreur égale et de signe contraire, elle serait du moins fortement diminuée par le diviseur m, nombre des équations. L'équation résultante

$$x = \frac{n + n' + n'' + \ldots}{m} \quad \text{ou} \quad \frac{[n]}{m} \quad (^1)$$

sera donc beaucoup plus exacte que chacune des proposées prise en particulier, pourvu que m soit un assez grand nombre.

D'après cela, nous aurons une idée très approchée des erreurs accidentelles qui auront été réellement commises dans chaque

(1) En représentant la somme des termes semblables par l'un d'eux enfermé dans les crochets [ ].

mesure partielle si nous portons cette valeur de x dans les équations. Ces équations ne seront pas satisfaites rigoureusement ; elles laisseront de petits résidus qui représenteront à très peu près les erreurs commises. Désignons-les par ε, ε', ε'', ... D'après cela,

$$\begin{aligned} x - n &= \varepsilon\,, \\ x - n' &= \varepsilon'\,, \\ x - n'' &= \varepsilon''\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

x ayant ici la valeur ci-dessus $\frac{[n]}{m}$. Il est facile de voir que la somme de ces résidus est nulle, car, si l'on remplace x par sa valeur, cette somme devient

$$\frac{n+n'+n''+\ldots}{m} - n + \frac{n+n'+n''+\ldots}{m} - n' + \frac{n+n'+n''+\ldots}{m} - n'' + \ldots.$$

somme qui se réduit évidemment à zéro.

Cela posé, remarquons que cette même somme

$$(x-n)+(x-n')+(x-n'')+\ldots$$

est, à un facteur constant près (le facteur 2), la dérivée par rapport à x de la somme des carrés des erreurs :

$$(x-n)^2+(x-n')^2+(x-n'')^2+\ldots;$$

De ce que cette dérivée est nulle, il résulte que la somme des carrés des erreurs est un minimum. Cela veut dire que toute autre valeur que la moyenne $\frac{[n]}{m}$, mise à la place de x dans les équations proposées, donnerait une plus forte somme des carrés des résidus.

Si l'on avait une autre série de m mesures de la même quantité, faites avec moins de soin et avec des instruments plus grossiers, la somme des résidus relatifs à la moyenne serait encore nulle, mais la somme de leurs carrés serait plus forte. On peut donc considérer cette somme des carrés, réduite au minimum, comme un moyen d'apprécier la précision de ces m mesures. Dès lors, pour juger de la précision d'une mesure isolée, il suffira de prendre la

moyenne des carrés des résidus, c'est-à-dire

$$\frac{\varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \ldots}{m} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m},$$

et d'en extraire la racine carrée. L'erreur moyenne d'une mesure isolée sera donc $\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}}$.

Équations de condition de forme quelconque. — Méthode des moindres carrés.

Il arrive souvent que la quantité à déterminer au moyen d'une série de mesures ne dépend pas de celles-ci par une relation aussi simple que $x = n$, et même, dans le cas le plus général, on aura plusieurs inconnues à déterminer à la fois, inconnues reliées aux quantités mesurées par une relation de la forme

$$f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, t) = \mathrm{N},$$

t étant une variable indépendante, le temps par exemple, A, B, C,... des constantes, indépendantes les unes des autres, qui entrent dans l'expression analytique de la loi, et N une quantité fournie par l'observation. Si l'on possède m mesures N, N′, N″, ... répondant à diverses valeurs t, t', t'', ... de l'argument t, on formera m équations de la forme

$$\begin{aligned} &f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, t) = \mathrm{N}, \\ &f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, t') = \mathrm{N}', \\ &f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, t'') = \mathrm{N}'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Appliquons à ce système la règle précédente, c'est-à-dire cherchons à déterminer les constantes inconnues A, B, C,... à l'aide de ces m équations (m étant bien supérieur au nombre desdites inconnues), de manière que la somme des carrés des résidus, c'est-à-dire

$$[f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, t) - \mathrm{N}]^2 + [f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, t') - \mathrm{N}']^2 + \ldots,$$

soit un minimum. Pour cela il faut et il suffit que les dérivées de cette somme prises 1° par rapport à A, 2° par rapport à B, 3° par rapport à C, etc., inconnues que nous avons supposées indépen-

dantes les unes des autres, soient séparément nulles. Ces conditions du minimum nous fourniront autant d'équations finales entre A, B, C,... et N, N′, N″,... qu'il y a d'inconnues, système qu'on résoudra par les méthodes habituelles de l'Algèbre.

Équations de condition ramenées à la forme linéaire.

Ces calculs seraient bien souvent inextricables; heureusement les circonstances ordinaires de la pratique nous permettent de les simplifier considérablement. En effet, dans la pratique, on connaît toujours d'avance des valeurs plus ou moins approchées des inconnues A, B, C,.... Par exemple, dans l'Astronomie nautique, l'estime fournit des valeurs approchées des inconnues λ et L. Désignons-les ici par A′, B′, C′,... et par x, y, z,... les petites corrections dont ces valeurs provisoires ont besoin, en sorte qu'on ait

$$A = A' + x, \quad B = B' + y, \quad C = C' + z, \quad \ldots.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation générale et développons le premier membre, en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier, c'est-à-dire les termes $x^2, y^2, z^2, \ldots$ ou $xy, yz, \ldots$, ainsi que les suivants, nous aurons

$$f(A', B', C', \ldots, t) + \frac{df}{dA}x + \frac{df}{dB}y + \frac{df}{dC}z + \ldots = N,$$

équation linéaire en x, y, z, ... qu'on écrira

$$ax + by + cz + \ldots, = n,$$

en désignant par n la différence immédiatement calculable

$$N - f(A', B', C', \ldots, t).$$

Dès lors, il est bien facile d'appliquer, à la résolution des équations linéaires

$$\begin{aligned} ax + by + cz + \ldots &= n, \\ a'x + b'y + c'z + \ldots &= n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \end{aligned}$$

la condition de rendre minimum la somme des carrés des résid

ou erreurs, c'est-à-dire

$$(ax + by + cz + \ldots - n)^2 + (a'x + b'y + c'z + \ldots - n')^2 + \ldots.$$

Réduisons les inconnues à trois pour fixer les idées et écrivons que la dérivée de la somme précédente, prise par rapport à x, est nulle; nous aurons l'équation finale en x

$$2a(ax + by + cz - n) + 2a'(a'x + b'y + c'z - n') + \ldots = 0.$$

Supprimons le facteur 2 et désignons par $[aa]$, $[ab]$, ... les sommes telles que

$$aa + a'a' + a''a'' + \ldots \quad \text{ou} \quad ab + a'b' + a''b'' + \ldots.$$

Cette équation prendra la forme

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z = [an].$$

En opérant de même pour y et pour z, nous aurons les deux dernières équations finales

$$[ab]x + [bb]y + [bc]z = [bn],$$
$$[ac]x + [bc]y + [cc]z = [cn].$$

Ces trois équations finales nous donneront pour x, y, z un système de valeurs jouissant de la propriété de rendre minimum la somme des carrés des résidus. Tout autre système de valeurs qu'on assignerait à x, y, z, dans les m équations de condition, donnerait une plus grande somme pour les carrés des résidus. La règle est donc :

Pour former l'équation en x, ajouter toutes les équations de condition après avoir multiplié chacune d'elles par le coefficient de x dans cette équation, le signe y compris. Opérer de même pour les équations finales relatives à y et à z.

On voit que cette prescription revient au fond à donner une grande prépondérance aux équations de condition où x a les plus forts coefficients, et de plus à changer tous les signes des équations où x a un coefficient négatif. Ainsi, dans l'exemple suivant,

$$3,0x + 1,4y = 0,4,$$
$$-1,2x + 3,0y = 1,5,$$
$$0,1x + 2,0y = 1,0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si l'on tire, de la première, la valeur de x, l'erreur des mesures sera divisée par 3; elle le serait par un nombre trente fois plus petit dans la troisième. C'est donc comme si, dans la première équation, x avait été obtenu par un nombre neuf cents fois plus grand d'observations directes (p. 202). Par conséquent, il faut donner à la première une importance neuf cents fois plus grande qu'à la dernière. C'est ce qui a lieu quand, pour former l'équation finale en x, on fait la somme des équations ainsi transformées :

$$\begin{aligned} 9,00x + 4,2y &= 1,2, \\ 1,44x + 3,6y &= -1,8, \\ 0,01x + 0,2y &= 0,1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On faisait quelque chose de cela autrefois, avant l'introduction de la méthode des moindres carrés due à Legendre, car, pour former l'équation en x, on ajoutait ensemble les équations où x avait un fort coefficient, après avoir changé de signe celles où ce coefficient de x était négatif, et l'on négligeait les équations dans lesquelles x avait un coefficient très faible. Mais la méthode des moindres carrés a l'avantage de donner à chaque équation, à chaque mesure par conséquent, l'influence qui lui revient réellement, de bannir tout arbitraire dans l'appréciation de l'importance de telle ou telle équation, et d'aboutir, en outre, au système des valeurs *les plus probables* pour les inconnues, ce qui sera pleinement démontré plus loin.

Erreur moyenne des observations.

Si nous portons les valeurs de x, y, z, ainsi trouvées, dans les m équations primitives, nous aurons m résidus ε, ε', ε'', ... tels que la somme de leurs carrés

$$\varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \ldots \quad \text{ou bien} \quad [\varepsilon\varepsilon]$$

soit un minimum. Il est donc naturel de prendre, comme dans le cas de la moyenne arithmétique, la moyenne de ces m carrés, c'est-à-dire $\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}$ pour la valeur moyenne des carrés des erreurs, ou $\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}}$ pour l'erreur moyenne.

Cependant il est essentiel de remarquer ici que, si nous n'avions que trois équations de condition au lieu de m, en les résolvant nous obtiendrions un système de valeurs pour x, y, z qui ne laisserait aucun résidu dans ces équations. Nous n'avons donc en réalité, malgré nos m résidus, que $m - 3$ données distinctes pour juger des erreurs; $\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}}$ donnerait une idée trop avantageuse du degré de précision des mesures. On est ainsi conduit à adopter $m - 3$ et non m pour dénominateur. D'après cela nous prendrons pour *erreur moyenne* d'une observation $\pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-i}}$, i étant le nombre des inconnues, et nous la désignerons en général par ε_1 (¹).

(¹) Le motif allégué pourrait paraître peu concluant. Considérons donc la question de plus près et supposons qu'il s'agisse de m équations à une inconnue telles que

$$x = n,$$
$$x = n',$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

La valeur conclue est $x = \frac{[n]}{m}$. En la portant dans les équations de condition, on a pour résidus

$$\frac{[n]}{m} - n \text{ ou } \varepsilon,$$
$$\frac{[n]}{m} - n' \text{ ou } \varepsilon',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si ces résidus étaient absolument exacts, nous en conclurions ε_1, erreur moyenne d'une observation, par la relation

$$m\varepsilon_1^2 = [\varepsilon\varepsilon],$$

et, par suite, nous aurions $\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}$ pour l'erreur moyenne de la valeur assignée à x. Mais $\frac{[n]}{m}$ n'est que la valeur la plus probable de x; soit donc $\frac{[n]}{m} + \alpha$ la valeur véritable; les m résidus exacts seront

$$\varepsilon - \alpha,$$
$$\varepsilon' - \alpha,$$
$$\varepsilon'' - \alpha,$$
$$\ldots\ldots$$

La somme de leurs carrés sera

$$[\varepsilon\varepsilon] - 2\alpha[\varepsilon] + m\alpha^2 = m\varepsilon_1^2.$$

Remarquez qu'ici $[\varepsilon] = 0$ et que, α devant être de l'ordre de grandeur de l'erreur

Erreur moyenne d'une fonction quelconque de quantités d'une précision donnée.

Soit $U = f(A, B, C, \ldots)$ une fonction des quantités A, B, C, pour lesquelles les erreurs à craindre ou les erreurs moyennes soient respectivement

$$\pm\alpha, \quad \pm\beta, \quad \pm\gamma.$$

Lorsque A, B, C varieront de quantités de cet ordre-là, U variera lui-même d'une petite quantité u qu'il faut déterminer et que nous considérerons, sous certaines conditions, comme l'erreur à craindre sur U. Or α, β, γ étant de très petites quantités dont on peut négliger les puissances supérieures et les produits dans le développement suivant,

$$U \pm u = f(A, B, C, \ldots) \pm \frac{df}{dA}\alpha \pm \frac{df}{dB}\beta \pm \frac{df}{dC}\gamma,$$

ou bien

$$\pm u = \pm \frac{df}{dA}\alpha \pm \frac{df}{dB}\beta \pm \frac{df}{dC}\gamma,$$

si nous formions des relations de ce genre pour toutes les valeurs qu'il est permis d'attribuer à α, β, γ, nous aurions les valeurs correspondantes de u. Par conséquent, nous obtiendrons la valeur moyenne de u en prenant la racine carrée de la somme des carrés de

---

moyenne de x, nous pourrons, sans erreur sensible, le remplacer par $\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}$. La relation précédente se réduira donc à

$$[\varepsilon\varepsilon] + m\left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}\right)^2 = m\varepsilon_1^2,$$

d'où

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-1}}.$$

Par un raisonnement analogue on ferait voir que, dans le cas de i inconnues, on doit écrire

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-i}};$$

mais il faudrait s'appuyer sur les développements que nous donnerons plus loin —

toutes ses valeurs particulières divisée par leur nombre. Or, si nous laissons ces valeurs particulières sous la forme susdite, en faisant la somme des carrés tous les doubles produits tels que $2\frac{df}{dA}\frac{df}{dB}\alpha\beta\ldots$ disparaîtront, puisqu'à chaque valeur positive de α ou de β ou de γ correspond une valeur négative de même ordre de grandeur (d'après le caractère même des erreurs accidentelles). On aura donc finalement, en prenant la racine carrée de la moyenne de cette somme de carrés,

$$u = \pm\sqrt{\left(\frac{df}{dA}\right)^2\alpha^2 + \left(\frac{df}{dB}\right)^2\beta^2 + \left(\frac{df}{dC}\right)^2\gamma^2},$$

puisque α^2, β^2, γ^2 sont considérés comme les moyennes des carrés de toutes les erreurs dont A, B, C sont susceptibles.

Cela revient à différentier U par rapport à A, B, C, à remplacer dA, dB, dC par α, β, γ et à extraire la racine carrée de la somme des carrés de ces divers termes.

Applications. — *Nous avons trouvé, pour la moyenne de m mesures n, n', n'', ... d'une quantité x,*

$$x = \frac{[n]}{m},$$

et, en désignant par ε, ε', ... les écarts des mesures individuelles avec la moyenne, nous avons vu que l'erreur moyenne d'une mesure est

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}} \quad \text{ou plutôt} \quad \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-1}}.$$

Quelle sera l'erreur à craindre sur la moyenne elle-même?

Ici x est une fonction bien simple des mesures n, n', n'', ..., car

$$x = \frac{n}{m} + \frac{n'}{m} + \frac{n''}{m} + \ldots.$$

L'erreur moyenne de ces divers termes est $\pm\frac{\varepsilon_1}{m}$; donc celle de x sera

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2 + \ldots} = \pm\sqrt{m\left(\frac{\varepsilon_1}{m}\right)^2} = \pm\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}.$$

Par exemple, l'erreur moyenne à craindre sur la moyenne de cent mesures, effectuées à $1'$ près, sera, non pas $\frac{1'}{100}$, mais $\frac{1'}{10}$, et, pour réduire de moitié l'erreur à craindre sur des mesures faites à la minute près, il faut prendre la moyenne de quatre mesures indépendantes. En d'autres termes, la précision d'une moyenne n'est pas proportionnelle au nombre des mesures individuelles, mais seulement à la racine carrée de ce nombre.

Seconde application. — *Pour obtenir la surface d'un rectangle, on en a mesuré les côtés a et b, le premier avec une erreur moyenne* $\pm\alpha$, *le second à* $\pm\beta$ *près. Quelle est l'erreur à craindre sur la surface conclue ab?*

On aura pour cette erreur

$$\pm\sqrt{(b\alpha)^2+(a\beta)^2}.$$

De même l'erreur à craindre sur une ligne a mesurée en deux parts b et c, de sorte que $a=b+c$, sera

$$\partial a=\pm\sqrt{(\partial b)^2+(\partial c)^2},$$

en donnant aux différentielles da, db, dc le sens d'erreurs moyennes et le signe ∂.

Enfin, si l'angle a est calculé par l'analogie des quatre sinus,

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A,$$

nous aurons, en différentiant cette expression après en avoir pris les logarithmes,

$$\frac{da}{\operatorname{tang} a}=\frac{db}{\operatorname{tang} b}+\frac{dA}{\operatorname{tang} A}-\frac{dB}{\operatorname{tang} B},$$

puis, en donnant aux différentielles la signification d'erreurs moyennes,

$$\partial a=\pm\operatorname{tang} a\sqrt{\left(\frac{\partial b}{\operatorname{tang} b}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\operatorname{tang} A}\right)^2+\left(\frac{\partial B}{\operatorname{tang} B}\right)^2}.$$

Erreur moyenne des solutions fournies par la méthode de Legendre.

Soient, pour fixer les idées, m équations à deux inconnues

$$\begin{aligned} ax + by &= n, \\ a'x + b'y &= n', \\ a''x + b''y &= n'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les équations finales seront

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y &= [an], \\ [ab]x + [bb]y &= [bn]. \end{aligned}$$

Pour avoir l'erreur de x en fonction des erreurs $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ des données $n, n', n'', \ldots$, différentions x par rapport à ces quantités, conformément à la prescription du paragraphe précédent. Puisque

$$x = \frac{[an][bb] - [ab][bn]}{[aa][bb] - [ab]^2},$$

nous aurons, en désignant pour un instant le dénominateur par D,

$$\begin{aligned} D\partial x = & \left\{[bb]a - [ab]b\right\}\partial n, \\ & + \left\{[bb]a' - [ab]b'\right\}\partial n', \\ & + \left\{[bb]a'' - [ab]b''\right\}\partial n'' + \ldots. \end{aligned}$$

Par suite, on aura, en faisant la somme des carrés de ces termes en $\partial n, \partial n', \partial n'', \ldots$ et en remplaçant $\partial n^2, \partial n'^2, \partial n''^2, \ldots$ par leur valeur moyenne ε_1^2,

$$D^2\partial x^2 = \left\{[bb]^2[aa] + [ab]^2[bb] - 2[bb][ab][ab]\right\}\varepsilon_1^2.$$

Si l'on réduit les termes semblables, et que l'on mette $[bb]$ en facteur commun, cette équation devient

$$D^2\partial x^2 = [bb]D\varepsilon_1^2, \quad \text{d'où} \quad \partial x = \sqrt{\frac{[bb]}{D}}\varepsilon_1.$$

Or $\frac{[bb]}{D}$ est la valeur qu'on obtiendrait pour x lui-même si dans les équations finales on remplaçait $[an]$ par 1 et $[bn]$ par 0.

De même l'erreur moyenne de y ou ∂y sera $\sqrt{\frac{[aa]}{D}}\,\varepsilon_1$, c'est-à-dire ε_1 multiplié par la racine carrée de la valeur qu'on déduirait pour y si dans les équations finales on remplaçait an par 0 et bn par 1. Ces prescriptions sont dues à Gauss.

S'il y avait trois inconnues, on aurait pareillement à résoudre les équations finales

$$\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z&=[an],\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z&=[bn],\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z&=[cn].\end{aligned}$$

Les valeurs de x, y, z, ... étant obtenues, on aurait leurs erreurs moyennes en remplaçant x, y, z par x', y', z' et en résolvant trois fois les mêmes équations avec les seconds membres remplacés successivement par

$$1,\ 0,\ 0 \text{ pour } x',\quad 0,\ 1,\ 0 \text{ pour } y',\quad 0,\ 0,\ 1 \text{ pour } z',$$

et les erreurs moyennes de x, y, z seraient $\varepsilon_1\sqrt{x'}$, $\varepsilon_1\sqrt{y'}$, $\varepsilon_1\sqrt{z'}$.

Application de la méthode des moindres carrés à un exemple.

La longueur l du pendule simple qui bat la seconde est liée à l'aplatissement μ du globe terrestre par l'équation de Clairaut,

$$l=l'+(\tfrac{5}{2}q-\mu)\,l'\cos^2\lambda,$$

où l' représente la longueur du pendule à l'équateur, q le rapport $\frac{1}{289}$ de la force centrifuge à la pesanteur, toujours à l'équateur, et λ la colatitude. Voici diverses mesures de l effectuées en divers points du globe par des navigateurs :

	λ.	l.
	° ′	mm
Au Spitzberg.....	10.10	996,13
Saint-Pétersbourg....	30. 3	994,97
New-York.....	49.17	993,24
La Jamaïque.....	72. 4	991,56
Ile Saint-Thomas....	89.35	991,19
Rio-de-Janeiro.....	112.55	991,77
Montevideo.....	124.54	992,70
Cap Horn.....	145.51	994,62
New-Shetland.....	152.56	995,23

Posons, pour abréger,

$$l = 991^{\text{mm}} + x, \quad (\tfrac{5}{2}q - \mu)l' = y;$$

nous aurons, pour déterminer x et y, les équations

$$\begin{aligned}
5^{\text{m}},13 &= x + 0,969y,\\
3,97 &= x + 0,749y,\\
2,24 &= x + 0,426y,\\
0,56 &= x + 0,095y,\\
0,19 &= x,\\
0,77 &= x + 0,152y,\\
1,70 &= x + 0,327y,\\
3,62 &= x + 0,685y,\\
4,23 &= x + 0,793y.
\end{aligned}$$

La première équation finale (relative à x) s'obtient simplement en faisant la somme de ces équations :

$$(1) \qquad 22,41 = 9x + 4,196y.$$

Pour avoir l'équation relative à y, multipliez chacune des équations proposées par le coefficient correspondant de y ;

$$\begin{aligned}
4^{\text{m}},97 &= 0,969x + 0,938y,\\
2,97 &= 0,749x + 0,561y,\\
0,95 &= 0,426x + 0,181y,\\
0,05 &= 0,095x + 0,009y,\\
0 \qquad & \qquad 0 \qquad\qquad 0\\
0,12 &= 0,152x + 0,023y,\\
0,56 &= 0,327x + 0,107y,\\
2,48 &= 0,685x + 0,469y,\\
3,35 &= 0,793x + 0,629y.
\end{aligned}$$

Leur somme fournit l'équation

$$(2) \qquad 15,45 = 4,196x + 2,917y.$$

La résolution des équations (1) et (2) donne

$$\begin{aligned}
x &= 0^{\text{mm}},066,\\
y &= 5^{\text{mm}},20;
\end{aligned}$$

par conséquent, la longueur du pendule est

A l'équateur..... $991^{mm},066$,
Aux pôles..... $996^{mm},266$.

Remarquez que y est une fonction de l'aplatissement μ; connaissant actuellement y, nous en pourrons déduire μ par la relation

$$(\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{1}{289}-\mu)991,066=5,20;$$

elle donne

$$\mu=\tfrac{1}{294}.$$

Il nous reste à déterminer l'erreur à craindre sur chaque résultat. Pour cela, il faut chercher d'abord l'erreur moyenne de ces mesures de l. En portant dans les équations de condition les valeurs de x et de y, nous aurons les résidus ε, ε', ε'', ... :

Nombres observés.	Nombres calculés.	Calc. — obs. ou valeurs de ε.	Carrés, c'est-à-dire $\varepsilon\varepsilon$.
5,13	5,11	— 0,02	0,0004
3,97	3,96	— 0,01	0,0001
2,24	2,28	+ 0,04	0,0016
0,56	0,56	0	0
0,19	0,07	— 0,12	0,0144
0,77	0,86	— 0,09	0,0081
1,70	1,77	+ 0,07	0,0049
3,62	3,63	— 0,01	0,0001
4,23	4,19	— 0,04	0,0016
			0,0272

La somme $[\varepsilon\varepsilon]=0,0272$; par conséquent l'erreur moyen d'une de ces mesures sera

$$\varepsilon_1=\sqrt{\frac{0,0272}{9-2}}=\pm 0^{mm},067,$$

puisque 9 est le nombre des équations et 2 celui des inconnues.

Quant à l'erreur à craindre sur les nombres trouvés pour x et nous résoudrons les deux systèmes :

$$\left.\begin{array}{l}9,000x'+4,196y'=1\\4,196x'+2,917y'=0\end{array}\right\}\quad\text{d'où}\quad x'=\frac{1}{2,96},$$

$$\left.\begin{array}{l}9,000x'+4,196y'=0\\4,196x'+2,917y'=1\end{array}\right\}\quad\text{d'où}\quad y'=\frac{1}{0,96}.$$

Par suite, l'erreur à craindre sur x, ou $\varepsilon_1 \sqrt{x'}$, sera

$$\pm \frac{0^{mm},067}{\sqrt{2,96}} = \pm 0^{mm},039,$$

et sur y

$$\varepsilon_1 \sqrt{y'} = \pm \frac{0^{mm},067}{\sqrt{0,96}} = \pm 0^{mm},068.$$

Il est très intéressant de savoir avec quelle précision l'aplatissement μ est déterminé par ces anciennes mesures du pendule en divers lieux de la Terre. La relation

$$\left(\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{1}{289} - \mu\right)(991^{mm} + x) = y$$

donne, en différentiant par rapport à μ, x, y, mais en remarquant que ∂x peut être négligé à cause du très petit facteur qui le multiplie,

$$\partial\mu = \pm \frac{\partial y}{991} = \pm 0,000068.$$

Cela revient à dire que l'incertitude du dénominateur de $\frac{1}{291}$, valeur trouvée pour μ, est de ± 6 unités.

CHAPITRE XI.

OBSERVATIONS D'INÉGALE PRÉCISION.

Voici un cas où le simple bon sens indique immédiatement ce qu'il y a à faire. La colatitude d'une station a été déterminée à deux époques différentes, la première fois par une série de m observations, la seconde fois par une série de m' mesures de même précision. On a trouvé les valeurs λ et λ'. Comment doit-on combiner ces résultats, qui ne sauraient avoir même probabilité puisque m est différent de m'?

Si nous avions sous les yeux les observations primitives, elles se présenteraient sous la forme

Première série.	Seconde série.
$\lambda = n$	$\lambda = N$
$\lambda = n'$	$\lambda = N'$
$\lambda = n''$	$\lambda = N''$
.....	.....
Moyenne : $\lambda = \frac{[n]}{m}$	Moyenne : $\lambda' = \frac{[N]}{m'}$

Il n'y aurait qu'à prendre la moyenne générale, c'est-à-dire

$$\frac{[n] + [N]}{m + m'}.$$

Remplaçons, dans cette expression, $[n]$ par $m\lambda$ et $[N]$ par $m'\lambda'$, elle deviendra

$$\frac{m\lambda + m'\lambda'}{m + m'}.$$

Il ne faudra donc pas prendre la simple moyenne $\frac{\lambda + \lambda'}{2}$ de λ et de λ', mais bien ce qu'on pourrait appeler *leur centre de gravité*

en leur supposant des poids proportionnels aux nombres d'observations m et m' (¹).

Plus généralement, pour combiner un certain nombre de résultats $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ dont les poids respectifs seraient $p, p', p'', \ldots$, il faut multiplier chacun d'eux par son poids et diviser la somme de ces produits par la somme des poids. Nous écrirons donc

$$\frac{p\lambda + p'\lambda' + p''\lambda'' \ldots}{p + p' + p'' \ldots} \quad \text{ou} \quad \frac{[p\lambda]}{[p]}.$$

Le poids de ce résultat sera évidemment $[p]$.

Dans l'exemple précédent, nous avons obtenu immédiatement les poids des valeurs λ, λ', λ'', ..., parce que nous supposions connus les nombres d'observations supposées elles-mêmes d'égale précision. Il arrive souvent que ces nombres ne sont pas donnés; on n'a que les erreurs moyennes assignées par les observateurs à leurs résultats $\lambda, \lambda', \lambda''$, ... Désignons ces erreurs moyennes par e, e', e'', ..., puis imaginons que le résultat λ provienne de la moyenne de p observations affectées de l'erreur moyenne E, que λ' résulte pareillement de p' mesures de même précision, et ainsi de suite. Il suffira que les nombres p, p', p'', ... satisfassent aux relations

$$(1) \qquad e = \frac{E}{\sqrt{p}}, \quad e' = \frac{E}{\sqrt{p'}}, \quad e'' = \frac{E}{\sqrt{p''}}, \quad \ldots,$$

E étant une quantité arbitraire, pour ramener la question au cas précédent, et être autorisé à écrire

$$\frac{p\lambda + p'\lambda' + p''\lambda'' + \ldots}{p + p' + p'' + \ldots} \quad \text{ou} \quad \frac{[p\lambda]}{[p]}.$$

Le poids du résultat sera $p + p' + p'' + \ldots$ ou $[p]$, et son erreur moyenne sera $\dfrac{E}{\sqrt{p + p' + p'' + \ldots}}$ ou $\dfrac{E}{\sqrt{[p]}}$.

Ainsi, les poids à attribuer aux valeurs λ, λ', ... n'étant assujettis qu'à être inversement proportionnels aux carrés de leurs erreurs

(¹) C'est en effet par une formule de ce genre qu'on calcule le centre de gravité d'une droite dont les extrémités, situées aux distances λ et λ' d'un point pris pour origine, seraient chargées des poids m et m'.

moyennes, on dispose entièrement de l'arbitraire E. Celle-ci sera l'erreur moyenne d'une de ces $p + p' + p''$... observations fictives; mais, comme les relations (1) doivent toujours être satisfaites, E sera d'autant plus grand qu'on aura pris des nombres plus grands pour ces poids. Cette arbitraire E porte le nom d'*erreur moyenne de l'observation fictive* ayant pour poids l'unité, ou, plus brièvement, *l'erreur moyenne de l'unité de poids*. Voici un exemple numérique.

On a à combiner les résultats partiels d'inégale précision

		Erreur moyenne.
λ.....	$40^\circ.9'.45''$	$\pm 2'',0$
λ'.....	$40.9.48$	$\pm 1,0$
λ''.....	$40.9.47$	$\pm 0,5$

Si l'on prend

$$p = \frac{1}{4}, \quad p' = \frac{1}{1}, \quad p'' = \frac{1}{0.25},$$

l'erreur moyenne E de l'unité de poids sera de 1''. Pour éviter les fractions, multiplions tous ces poids par 4, nous aurons

$$p = 1, \quad p' = 4, \quad p'' = 16,$$

et alors $E = \sqrt{4} = 2''$. Ainsi λ sera censé résulter d'une seule observation affectée d'une erreur moyenne de 2''; λ' résulterait de quatre observations pareilles et λ'' de seize. On fera le calcul de la manière suivante, en ne tenant compte que des secondes :

$45'' \times 1$.....	$45''$
48×4.....	192
47×16....	752
Somme..	989

$\frac{989''}{1+4+16} = 47'',1$, avec l'erreur moyenne $\frac{2''}{\sqrt{21}} = \pm 0'',44$, et la colatitude conclue sera

$$\lambda = 41^\circ 9' 47'',1 \pm 0'',44.$$

Quand il s'agit d'équations linéaires de la forme

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= n, \\ a'x + b'y + c'z &= n', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et si l'on connaît les erreurs moyennes e, e', ... des mesures n, n', ..., on formera les poids relatifs à ces équations par

$$p = \frac{E^2}{e^2}, \quad p' = \frac{E^2}{e'^2}, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire en prenant des nombres inversement proportionnels aux carrés de ces erreurs moyennes. Dès lors, la première équation pourra être considérée comme provenant de la moyenne de p équations ayant même premier membre, mais dont les seconds membres seraient fournis par p mesures affectées de l'erreur moyenne E. De même, la deuxième résulterait de p' mesures affectées de la même erreur moyenne E, et ainsi de suite. Nous rentrons ainsi dans le cas des observations d'égale précision et la somme des carrés des erreurs qu'il faut rendre minimum sera

$$p\varepsilon^2 + p'\varepsilon^2 + \ldots,$$

en désignant ici, comme d'ordinaire, par ε, ε', ... les résidus des équations de condition.

Pour cela il suffira de multiplier l'équation

$$aa.x + ab.y + ac.z = an,$$

par p, l'équation

$$a'a'x + a'b'y + a'c' = a'n'$$

par p', etc., et d'en faire la somme. Les équations finales seront donc

$$[aap].x + [abp].y + [acp].z = [anp],$$
$$[abp].x + [bbp].y + [bcp].z = [bnp],$$
$$[acp].x + [bcp].y + [ccp].z = [cnp].$$

Les valeurs des inconnues se déduisent de ces trois équations finales. Quant aux erreurs moyennes, si l'on résout de nouveau les équations finales après avoir accentué les lettres x, y, z et remplacé les seconds membres par 1, 0, 0, on aura

$$\text{Erreur moyenne de } x = E\sqrt{x'}.$$

On opérera de même pour y et z.

Le plus souvent on ne connaît pas d'avance avec une exactitude

suffisante les erreurs moyennes dont les n mesures sont affectées. C'est de sentiment qu'on évalue les poids en prenant des nombres simples 1, 2, 3, ... Dans ce cas, l'erreur moyenne de l'unité de poids doit être déterminée *a posteriori*. On portera donc les valeurs obtenues pour les inconnues dans les équations primitives, on formera les carrés des résidus, on multipliera ces carrés par leurs poids respectifs, et on aura

$$\text{Erreur moyenne de l'unité de poids } E = \pm\sqrt{\frac{[pzz]}{m-i}}.$$

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de traiter par la méthode des moindres carrés les observations d'une comète recueillies dans divers observatoires; qu'à Paris les observations aient été faites avec un équatorial de $0^m,24$; que dans un observatoire privé on ait employé une petite lunette non parallactique avec un micromètre annulaire dont les résultats comportent, en général, des erreurs beaucoup plus considérables; enfin qu'une troisième partie des observations ait été faite à Poulkowa avec un objectif de $0^m,38$ et par une méthode de triangulation (avec de petites étoiles) qui jouit d'une extrême précision. Ici l'attribution des poids devient assez délicate. Le calculateur choisit ordinairement des nombres simples, de manière à donner une prépondérance suffisante aux observations réputées les plus précises. Sans doute on réduirait l'arbitraire en recommençant le calcul avec de nouveaux poids déduits des écarts constatés, dans la première solution, entre la théorie et l'observation, mais il ne faut pas oublier que ces écarts eux-mêmes n'expriment pas toujours les véritables erreurs de l'observation quand on n'opère que sur un nombre très limité de données pour déterminer plusieurs inconnues. On peut craindre d'ailleurs que la théorie ne soit pas capable de représenter les phénomènes dans les plus petits détails. Le calculateur est donc tenu à beaucoup de prudence, car, en certains cas, le seul changement des poids fera varier sensiblement les résultats, et une idée préconçue sur la solution à obtenir pourrait aisément exercer quelque influence par l'intermédiaire de ce choix.

OBSERVATIONS D'ÉGALE PRÉCISION.

1° *Moyenne arithmétique.*

m équations de condition.	Résidus.	Carrés.
$x = n$	ε	$\varepsilon\varepsilon$
$x = n'$	ε'	$\varepsilon'\varepsilon'$
$x = n''$	ε''	$\varepsilon''\varepsilon''$
.....	...	.....
Éq. finale. $mx = [n]$	Somme...	$[\varepsilon\varepsilon]$

Solution.. $x = \dfrac{[n]}{m}$

Erreur moyenne d'une observation .... $\varepsilon_1 = \pm\sqrt{\dfrac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-1}}$

Erreur moyenne de la valeur de x.... $= \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{m}}$

2° *Équations linéaires à plusieurs inconnues.*

m équations de condition.	Résidus.	Carrés.
$ax + by = n$	ε	$\varepsilon\varepsilon$
$a'x + b'y = n'$	ε'	$\varepsilon'\varepsilon'$
$a''x + b''y = n''$	ε''	$\varepsilon''\varepsilon''$
.....	...	.....
	Somme...	$[\varepsilon\varepsilon]$

Équations finales.

$[aa]x + [ab]y = [an]$
$[ab]x + [bb]y = [bn]$
d'où x et y.

Err. moyenne d'une observation ..... $\varepsilon_1 = \pm\sqrt{\dfrac{[\varepsilon\varepsilon]}{m-2}}$

Calcul des erreurs moyennes de x et de y.

$[aa]x' + [ab]y' = 1$
$[ab]x' + [bb]y' = 0$
d'où x'.

Erreur moyenne de la valeur de x..... $= \pm\varepsilon_1\sqrt{x'}$

$[aa]x' + [ab]y' = 0$
$[ab]x' + [bb]y' = 1$
d'où y'.

Erreur moyenne de la valeur de y..... $= \pm\varepsilon_1\sqrt{y'}$

OBSERVATIONS D'INÉGALE PRÉCISION.

1° *Moyenne arithmétique.*

m équations de condition.	Poids.	Résidus.	Carrés × Poids.
$x = a$	p	ε	$p\varepsilon\varepsilon$
$x = a'$	p'	ε'	$p\varepsilon'\varepsilon'$
$x = a''$	p''	ε''	$p\varepsilon''\varepsilon''$
.....	...	...	.....
Éq. finale. $[p]x = [pa]$		Somme...	$[p\varepsilon\varepsilon]$

Solution.. $x = \dfrac{[pa]}{[p]}$

Erreur moyenne de l'unité de poids... $E = \pm\sqrt{\dfrac{[p\varepsilon\varepsilon]}{m-1}}$

Erreur moyenne de la valeur de x.... $= \dfrac{E}{\sqrt{[p]}}$

2° *Équations linéaires à plusieurs inconnues.*

m équations de condition.	Poids.	Résidus.	Carrés × Poids.
$ax + by = n$	p	ε	$p\varepsilon\varepsilon$
$a'x + b'y = n'$	p'	ε'	$p'\varepsilon'\varepsilon'$
$a''x + b''y = n''$	p''	ε''	$p''\varepsilon''\varepsilon''$
.....	...	...	.....
		Somme...	$[p\varepsilon\varepsilon]$

Équations finales.

$[aap]x + [abp]y = [anp]$
$[abp]x + [bbp]y = [bnp]$
d'où x et y.

Err. moyenne de l'unité de poids.. $E = \pm\sqrt{\dfrac{[p\varepsilon\varepsilon]}{m-2}}$

Calcul des erreurs moyennes de x et de y.

$[aap]x' + [abp]y' = 1$
$[abp]x' + [bbp]y' = 0$
d'où x'.

Erreur moyenne de la valeur de x..... $= E\sqrt{x'}$

$[aap]x' + [abp]y' = 0$
$[abp]x' + [bbp]y' = 1$
d'où y'.

Erreur moyenne de la valeur de y..... $= E\sqrt{y'}$

CHAPITRE XII.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS A LA THÉORIE DES ERREURS.

La théorie des erreurs fortuites d'observation ou de mesure rentre évidemment dans celle des probabilités. Il nous suffira de rappeler ici la définition de la probabilité mathématique d'un événement et le théorème de Moivre sur les probabilités composées.

Définition. — *La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des chances favorables à cet événement au nombre total des chances favorables ou défavorables.*

Si une urne contient 100 boules blanches et 500 boules noires, la probabilité de tirer de cette urne une boule blanche sera $\frac{100}{600} = \frac{1}{6}$.

Si l'on jette un dé ayant six faces numérotées de 1 à 6, la probabilité d'amener un de ces numéros, 2 par exemple, sera $\frac{1}{6}$.

D'après cette définition, une probabilité exprimée en nombres est toujours une fraction; l'unité représente la certitude.

Théorème. — *La probabilité de la production simultanée de plusieurs événements indépendants les uns des autres est le produit des probabilités relatives à chacun de ces événements pris à part.*

Par exemple, si l'on joue avec deux dés, la probabilité d'amener *sonnez*, c'est-à-dire les deux 6, sera $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Si l'on a trois urnes contenant l'une 25 boules noires pour 75 boules blanches, la deuxième 50 boules noires et 50 boules blanches, la troisième 75 boules noires et 25 blanches, la probabilité de tirer trois boules noires en puisant une fois dans chaque urne sera

$$\frac{25}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{75}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}.$$

Un caractère constamment remarqué dans les erreurs accidentelles commises dans une série de mesures quelconques, c'est que les petites erreurs sont les plus nombreuses ; les autres le sont d'autant moins qu'elles sont plus fortes. Il pourrait donc exister une relation assignable en nombres entre la grandeur de ces erreurs fortuites et leur probabilité.

Recherche de cette loi.

Les théoriciens ont cherché à l'établir *a priori* au moyen d'une hypothèse sur l'essence des erreurs accidentelles. Supposons, ont-ils dit, qu'il n'y ait pas de distinction essentielle à faire entre celles-là et les systématiques, et que les premières soient dues à des causes constantes, comme les secondes, mais en très grand nombre. Admettons, de plus, que chaque cause produise des erreurs ne pouvant dépasser une très petite quantité α, toujours la même, et affectant indifféremment les deux sens positif et négatif. Cette hypothèse nous replace dans le cas très particulier que nous avons considéré, page 66, dans l'emploi des tables de logarithmes. Admettons, enfin, que les erreurs accidentelles observées résultent de toutes les combinaisons possibles d'un nombre très grand m de ces petites erreurs élémentaires. Le Calcul des probabilités montre que ces combinaisons seront exprimées par les coefficients du binôme $(1+x)^m$, et une analyse fort simple établit que la différence entre deux coefficients successifs devient, en passant à la limite où $m=\infty$, la dérivée de la loi de probabilité des erreurs qu'une simple intégration fera dès lors connaître. Nous nous bornerons à signaler cette conception *a priori*, pour passer à des considérations moins hypothétiques.

S'il existe une loi de probabilité des erreurs telles que x, exprimons-la provisoirement par $f(x)$, et cherchons d'abord les caractères immédiatement saisissables d'une telle fonction. D'abord, comme les valeurs positives de x ont même probabilité que les valeurs négatives, $f(x)$ devra être indépendant du signe de x. Il devra s'annuler pour toute valeur de x dépassant les limites $\pm k$, k étant l'erreur maximum qu'on puisse commettre dans le genre d'observation considéré. De plus, si nous introduisons ici l'idée de con-

tinuité imposée par la représentation de la loi au moyen de la forme $f(x)$, l'erreur x devra pouvoir passer par tous les états de grandeur entre $-k$ et $+k$. Il y a donc une infinité d'erreurs possibles. Lorsque, sur un nombre m d'observations, on constate qu'il y a p erreurs comprises entre x et $x+\Delta x$, on est conduit à évaluer la probabilité de ces erreurs par la fraction $\frac{p}{m}$. Il en résulte qu'en appliquant ici notre loi $f(x)$, on devra avoir, quel que soit m,

$$\frac{p}{m}=\int_{-k}^{x+\Delta x} f(x)\,dx,$$

en sorte que la probabilité d'une erreur absolument déterminée x est la quantité infinitésimale $f(x)\,dx$. Mais en même temps, si l'on étend l'intégrale précédente à toute l'échelle des erreurs, de $-k$ à $+k$, cette probabilité sera la certitude exprimée par l'unité, en sorte que l'on doit avoir

$$\int_{-k}^{+k} f(x)\,dx=1.$$

Ces caractères de la fonction étant reconnus, appuyons-nous, pour achever de la déterminer, sur quelque chose d'universellement admis. Dans le cas simple de mesures répétées d'une même grandeur, tout le monde s'accorde à considérer la moyenne arithmétique comme la valeur la plus probable de l'inconnue, et les écarts des mesures isolées, comparées à la moyenne, comme donnant à très peu près les erreurs de ces mesures. La somme de celles-ci est nulle, c'est-à-dire

$$(1)\qquad \varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''+\ldots=0.$$

D'autre part, si $f(\varepsilon)d\varepsilon$ est la probabilité de l'erreur ε, $f(\varepsilon')d\varepsilon$ celle de l'erreur ε', ..., la probabilité de l'apparition simultanée de ces m erreurs sera, par le théorème de Moivre,

$$f(\varepsilon).f(\varepsilon').f(\varepsilon'')\ldots d\varepsilon^m.$$

Pour que les valeurs des inconnues qui répondent à cet ensemble d'écarts soient les plus probables, il faut que cette probabilité soit un maximum, c'est-à-dire que sa dérivée soit nulle. Prenons-la

logarithmiquement, il viendra

$$(2)\qquad \frac{1}{f(\varepsilon)}\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}+\frac{1}{f(\varepsilon')}\frac{df(\varepsilon')}{d\varepsilon}+\frac{1}{f(\varepsilon'')}\frac{df(\varepsilon'')}{d\varepsilon}+\ldots=0.$$

Les deux conditions (1) et (2) devant être identiques, à un facteur constant près 2α, nous écrirons, en substituant le symbole général x à ε, ε', ...

$$\frac{df(x)}{f(x)}=2\alpha x\,dx,$$

ce qui détermine la forme de la fonction. En effet, en intégrant, il vient

$$\mathcal{L}f(x)-\mathcal{L}C=\alpha x^2,$$

$\mathcal{L}C$ étant la constante, d'où

$$f(x)=Ce^{\alpha x^2}.$$

α doit être négatif, car il s'agit ici d'un maximum; autrement dit, $f(x)$ doit aller en diminuant à mesure que x croît et se rapproche de la limite k. Nous le remplacerons par $-h^2$. D'autre part, on déterminera C par la condition

$$\int_{+k}^{+k} Ce^{-h^2x^2}dx=1.$$

Comme, à partir d'une valeur un peu notable de x jusqu'à l'infini, cette intégrale est presque nulle, nous pourrons, sans erreur sensible, poser

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ce^{-h^2x^2}dx=1,$$

ce qui donne $C=\frac{h}{\sqrt{\pi}}$. On a donc finalement

$$f(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}.$$

Mais cette manière de procéder a l'inconvénient de ne rien ajouter aux analogies qui nous ont conduit à la méthode des moindres carrés. Il est bien préférable de considérer les choses d'un nouveau point de vue. Nous allons appliquer ici une seconde fois la méthode expérimentale, c'est-à-dire chercher, par expé-

rience, si vraiment il existe une relation constante entre la probabilité d'une erreur et la grandeur de cette erreur; puis, opérant sur des mesures réellement faites, sur des écarts dûment constatés, nous tâcherons de découvrir graphiquement cette loi.

Recherche empirique de la loi de probabilité des erreurs fortuites.

Prenons, en premier lieu, des observations astronomiques. Pour déterminer la position du point vernal, origine des ascensions droites, Bradley a observé 470 fois, à la lunette méridienne de l'Observatoire de Greenwich, la différence d'Æ entre le Soleil et une certaine étoile. Bessel a réduit avec beaucoup de soin ces 470 observations, dont la moyenne donne la position du point vernal d'une manière très exacte. En comparant cette moyenne avec chaque observation, on obtient 470 écarts, qui représentent à très peu près les erreurs réellement commises. On a obtenu ainsi, pour l'erreur moyenne $\varepsilon_1 = \pm\sqrt{\frac{(\varepsilon\varepsilon)}{470-1}}$, la valeur $\pm\, 0^s,39$. C'est l'erreur à craindre sur une mesure isolée. Quant à l'erreur à craindre sur la moyenne, elle se réduit, comme nous l'avons vu, à

$$\pm\frac{0^s,39}{\sqrt{470}} = 0^s,017.$$

On voit donc que cette moyenne est à très peu près l'expression de la vérité; par suite, les 470 écarts ci-dessus mentionnés représentent de très près les erreurs réellement commises.

Or, en examinant le Tableau de ces 470 erreurs, on trouve, quant aux signes, qu'elles sont indifféremment et en pareil nombre positives ou négatives; quant à la grandeur, on trouve que :

Entre	$0^s,0$	et	$0^s,1$	il y a	94	erreurs,	tant positives	que négatives.
»	0,1	»	0,2	»	88	»	»	»
»	0,2	»	0,3	»	78	»	»	»
»	0,3	»	0,4	»	58	»	»	»
»	0,4	»	0,5	»	51	»	»	»
»	0,5	»	0,6	»	36	»	»	»
»	0,6	»	0,7	»	26	»	»	»

Entre	$0^s,7$	et	$0^s,8$	il y a	14 erreurs,	tant positives que négatives.
»	$0,8$	»	$0,9$	»	10	» »
»	$0,9$	»	$1,0$	»	7	» »
Au-dessus de			$1,0$	»	8	» »

Ainsi, à en juger par cette série, la probabilité qu'une erreur soit comprise entre 0^s et $0^s,1$, c'est-à-dire le rapport

$$\frac{\text{nombre des erreurs de cet ordre}}{\text{nombre total des erreurs}},$$

est $\frac{94}{470}$, tandis que la probabilité des erreurs plus fortes, c'est-à-dire $\frac{88}{470}$, $\frac{78}{470}$, ..., va en décroissant.

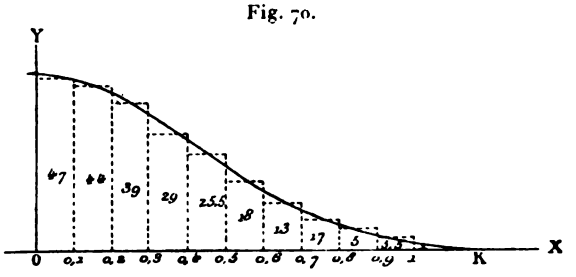
Évidemment ces fractions ou ces probabilités suivent une certaine loi : cherchons-la empiriquement à l'aide d'une construction graphique.

Si l'on choisit un système d'axes des x et des y, et que l'on porte les erreurs sur l'axe des x, on ne saurait porter les probabilités correspondantes sur l'axe des y, car la probabilité d'une erreur x déterminée, c'est-à-dire comprise entre x et $x+dx$, doit être infiniment petite ; elle n'est finie que si les limites de l'erreur diffèrent elles-mêmes d'une quantité finie. On est donc conduit à chercher graphiquement une courbe $y=f(x)$ telle que les probabilités ci-dessus soient représentées par les aires comprises entre les couples d'ordonnées qui répondent aux abscisses 0^s et $0^s,1$, $0^s,1$ et $0^s,2$, ... Comme il y a autant d'erreurs négatives que d'erreurs positives, cette courbe devra être symétrique de part et d'autre de l'axe des y ; en second lieu, entre les ordonnées relatives à $x=0$ et $x=+0^s,1$, l'aire devra être la même qu'entre les ordonnées de $x=0$ et $x=-0^s,1$, c'est-à-dire $\frac{94}{2}$ ou 47. On obtiendra cette courbe en divisant l'axe des x en parties proportionnelles à $0^s,1$, $0^s,2$, $0^s,3$, ... et en construisant sur les intervalles de 0^s à $0^s,1$, de $0^s,1$ à $0^s,2$, ... des rectangles proportionnels aux nombres 47, 44, ..., puis en traçant un trait continu qui laisse, en dedans, de petites aires triangulaires équivalentes à celles qu'il laissera en dehors.

La courbe suivante, dont nous ne donnons que la moitié située du côté des x positifs, représentera, par ses aires, la loi de probabilité des erreurs comptées sur les abscisses.

Elle se rapproche évidemment du genre de celles qui ont pour équation $y = ae^{-h^2x^2}$, a et h étant des paramètres à déterminer. Si

Fig. 70.



en effet on les détermine par deux de ces points, on verra que la courbe $y = 47,365e^{-(1,764)^2x^2}$ passe à peu près par tous les autres.

La seule différence appréciable consiste en ce que la courbe représentée par cette équation devrait atteindre l'axe des x, comme le fait la courbe que nous venons de tracer, en deux points symétriques par rapport à l'origine o, dont les abscisses $x = \pm k$ représenteraient les erreurs limites, impossibles à commettre dans ce genre d'observations. Au lieu de cela, la courbe

$$y = 47,365e^{-(1,764)^2x^2}$$

est en réalité asymptote à l'axe des x. Mais les lignes de cet ordre s'approchent si rapidement de l'axe des x, qu'au delà de l'abscisse $\pm k$ leur aire devient entièrement négligeable, comme on le verra plus tard.

Nous regarderons donc comme empiriquement établi avec toute l'exactitude désirable que, pour le genre d'observations ici considéré, la probabilité P d'une erreur comprise entre les limites finies x et $x + \Delta x$, ou, en d'autres termes, le rapport

$$\frac{\text{aire de la courbe comprise entre les ordonnées correspondantes}}{\text{aire totale de la courbe}}$$

aura pour expression

$$P = \frac{\int_x^{x+\Delta x} ae^{-h^2x^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-h^2x^2}dx}.$$

car, d'après ce qui a été dit tout à l'heure, il est permis de remplacer, sans erreur sensible,

$$\int_{-k}^{+k} ae^{-h^2x^2}dx \quad \text{par} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-h^2x^2}dx.$$

Or, on sait que l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-h^2x^2}dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{h};$$

donc on a finalement

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{x}^{x+dx} e^{-h^2x^2}dx,$$

et la probabilité infiniment petite de l'erreur déterminée x (c'est-à-dire comprise entre x et $x + dx$) sera

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx.$$

Telle est, d'après les excellentes observations de Bradley, la loi de probabilité des erreurs purement accidentelles, c'est-à-dire dégagées de toute erreur systématique. Et nous sommes ici en droit de considérer les choses ainsi, car, dans le système d'observation de Bradley, les erreurs systématiques dues à l'instrument étant sensiblement les mêmes pour l'étoile et pour le Soleil, ces erreurs disparaissent de la différence conclue des AR.

Mais il faut voir encore si, dans un genre de mesure tout différent, nous retrouverons la même loi de probabilité des erreurs accidentelles.

Le général Didion donne, dans son *Traité des probabilités appliquées au tir*, la série suivante d'épreuves faites avec un pistolet de cavalerie. Ce sont les écarts des balles tirées sur une cible où nous supposerons tracée une ligne verticale. Ces écarts sont donc mesurés dans le sens horizontal. L'arme employée n'ayant pas de déviation constante et les coups ayant été tirés avec le même soin, ces écarts, soit à droite, soit à gauche de la cible, doivent être considérés comme des erreurs accidentelles. En voici le Tableau :

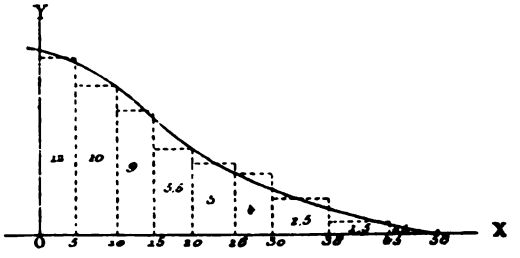
+ 5ᶜ	+10ᶜ	+ 5ᶜ	—31ᶜ	+ 8ᶜ	—14ᶜ	— 8ᶜ	0ᶜ	—23ᶜ
— 5	+13	+29	+25	+22	—27	— 56	3	—26
—29	+22	—40	0	—15	—13	— 8	—31	— 9
— 7	—23	— 7	+ 7	—10	+28	— 2	—12	—19
— 4	— 1	—13	—27	— 2	+28	— 37	+ 7	— 36
+11	+18	0	—17	—23	+ 5	— 2	—23	— 2
+ 6	+ 3	— 4	+10	+ 4	— 28	— 2	+37	— 10
— 6	— 3	— 3	— 2	— 14	0	— 19	—18	11
—24	—25	—27	—11	— 12	— 21	— 9	— 1	— 17
—17	+ 5	— 20	—12	— 16	— 1	— 2	0	— 8

En faisant la somme des carrés des écarts, divisant par 90 — 1 et extrayant la racine carrée, on trouve l'erreur moyenne d'un coup $\varepsilon_1 = \pm 18^{cm},3$. Il y a d'ailleurs quarante-deux erreurs positives, quarante-trois négatives et cinq erreurs nulles, indifféremment positives ou négatives. Si l'on range ces écarts par ordre de grandeur, sans faire acception des signes, on trouve :

Entre	0ᶜ	et	5ᶜ....	24	écarts positifs	ou négatifs.
»	5	»	10.....	20	»	»
»	10	»	15.....	18	»	»
»	15	»	21.....	11	»	»
»	21	»	26.....	10	»	»
»	26	»	31.....	8	»	»
»	31	»	38.....	5	»	»
»	38	»	45.....	3	»	»
Et au-delà de			56ᶜ....	1	»	»

En traçant une courbe dont les abscisses seront 0, 5, 10, 15,... et

Fig. 71.



telle que les aires comprises entre les ordonnées correspondantes soient proportionnelles aux nombres 12, 10, 9, $5\frac{1}{2}$, 5, 4, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 1, on obtient la *fig.* 71.

Cette courbe est représentée de très près par l'équation

$$y = 11,31\, e^{-(0,0369)^2 x^2}.$$

Elle est donc de même espèce que la précédente.

On trouvera le même résultat dans tous les genres de mesures ou d'observations, pourvu qu'elles ne soient pas affectées d'erreurs systématiques. La Statistique en fournit de nombreux exemples. C'est ainsi que les anomalies accidentelles de la taille humaine suivent la même loi de probabilité ; on s'en est assuré aux États-Unis, à l'occasion de la guerre de sécession, en examinant les documents statistiques qu'on y a recueillis sur la taille des contingents militaires. En voici le Tableau :

Sur 10 000 *hommes.*

Taille.	Nombre réel.	Formule.
61 po	105	100
62	169	171
63	369	368
64	686	675
65	1044	1051
66	1391	1399
67	1584	1584
68	1607	1531
69	1218	1260
70	852	884
71	467	531
72	277	267
73	139	118
74	92	61
.....	....	....

La taille moyenne, $67^{po},24$, semble être le type que la nature cherche à réaliser dans cette région, mais qu'elle n'atteint qu'avec des écarts attribuables à des causes multiples et purement accidentelles (B.-A. Gould).

Nous considérerons donc l'intégrale

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx$$

comme représentant très sensiblement la probabilité d'une erreur

accidentelle comprise entre $-x$ et $+x$ dans tout système de mesure ou d'observation dont le degré de précision sera défini par le paramètre h.

Signification du paramètre h.

Nous allons voir, en effet, que tel est le sens de cette constante. La probabilité de l'erreur x étant

$$\frac{\text{nombre des erreurs égales à } x}{\text{nombre total des erreurs}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx,$$

multiplions les deux membres par x^2; nous aurons

$$\frac{\text{somme des carrés des erreurs égales à } x}{\text{nombre total des erreurs}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2} dx.$$

En intégrant de $-\infty$ à $+\infty$, il viendra

$$\text{Moyenne des carrés de toutes les erreurs} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx.$$

Cette moyenne est ce que nous avons déjà désigné par ε_1^2. Quant à l'intégrale qui donne la valeur de ε_1^2 en fonction de h, nous l'obtiendrons aisément en différentiant par rapport à h une autre intégrale définie déjà employée, à savoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

On a ainsi

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} 2hx^2 e^{-h^2x^2} dx\, dh = -\frac{\sqrt{\pi}}{h^2} dh.$$

Par conséquent,

$$2\varepsilon_1^2 = \frac{1}{h^2} \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Ainsi, ε_1 donnant une idée nette de l'exactitude d'un système de mesures, il en sera de même de son inverse h. On devra considérer ce paramètre comme une grandeur proportionnelle au degré de précision. Quant à ε_1 il est aisé de voir que c'est l'abscisse du point d'inflexion de la courbe de probabilité.

Erreur probable.

Pour tirer parti de cette théorie, il faut savoir calculer les aires de la courbe de probabilité, c'est-à-dire les valeurs de l'intégrale définie

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}dx.$$

Réduisons l'exponentielle en série, $\mathcal{L}$ étant un logarithme népérien :

$$(e^{-h^2})^{x^2} = 1 + (\mathcal{L}e^{-h^2})\frac{x^2}{1}$$
$$+ (\mathcal{L}e^{-h^2})^2\frac{x^4}{1.2} + (\mathcal{L}e^{-h^2})^3\frac{x^6}{1.2.3} + \cdots.$$

En multipliant par $\frac{h}{\sqrt{\pi}}dx$ et intégrant,

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[hx - \frac{\frac{1}{3}(hx)^3}{1} + \frac{\frac{1}{5}(hx)^5}{1.2} - \frac{\frac{1}{7}(hx)^7}{1.2.3} + \cdots\right].$$

Nous sommes donc en état de calculer la probabilité P qu'une erreur soit comprise entre $-x$ et $+x$, x étant une quantité donnée. Renversons le problème et demandons-nous entre quelles limites $-\eta$ et $+\eta$ une erreur doit être comprise pour que sa probabilité P soit $\frac{1}{2}$. Nous aurons à calculer η par la condition

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[h\eta - \frac{\frac{1}{3}(h\eta)^3}{1} + \cdots\right].$$

On en tire, par un tâtonnement rapide,

$$h\eta = 0{,}4769363,$$

et, comme

$$h\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on a finalement

$$\eta = \varepsilon_1 \times 0{,}6744897.$$

Cette quantité r_1, telle qu'il y a à parier un contre un que l'erreur sera comprise entre $-r_1$ et $+r_1$, est ce que l'on appelle l'*erreur probable;* on vient de voir qu'elle est à très peu près les $\frac{2}{3}$ de l'erreur moyenne ε_1.

Lorsqu'en étudiant un système de mesures on trouve que l'erreur probable d'une mesure est de 0,1, par exemple, cela veut dire qu'il y a autant de chances que l'erreur d'une mesure, prise à part, soit entre $-0,1$ et $+0,1$ qu'en dehors de ces limites. En d'autres termes, dans une série de cent erreurs effectivement constatées pour ce genre de mesures, il y en aura cinquante plus petites et cinquante plus grandes que 0,1. Si l'on se reporte aux courbes dont nous nous sommes servi plus haut, l'erreur probable r_1 est l'abscisse dont l'ordonnée partage l'aire de la demi-courbe de probabilité en deux parties égales, tandis que l'erreur moyenne ε_1 n'est que l'abscisse du point d'inflexion. Ou bien encore, si l'on dresse la liste des erreurs d'une série par ordre de grandeur sans avoir égard aux signes, et qu'on plie la liste en deux, l'erreur probable sera dans ce pli, juste au milieu de la série. Or nous verrons que cette erreur probable remplace à elle seule toute la série et permet au besoin de la reconstituer, en sorte que, donner l'erreur probable d'une suite de mesures, c'est donner le moyen à la fois le plus simple et le plus exact d'en apprécier la précision.

Table de probabilités.

C'est la table des valeurs de l'intégrale définie que nous venons de réduire en série. Pour calculer aisément cette série, remplaçons hx par son équivalent $hr_1\frac{x}{r_1}$, ou par $0,4769\frac{x}{r_1}$; puis, prenant pour argument $\frac{x}{r_1}$ et lui donnant successivement pour valeurs 0; 0,1; 0,2; 0,3..., formons un tableau des valeurs que prend la série, c'est-à-dire P.

Par exemple, pour $\frac{x}{r_1} = 0,1$, on aurait

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}[0,04769 - \tfrac{1}{3}(0,04769)^3 + \ldots] = 0,05378,$$

et ainsi de suite.

Valeurs de $\frac{x}{r_1}$.	P.	Différence.	Valeurs de $\frac{x}{r_1}$.	P.	Différence.
0,0.....	0,000	54	2,5.....	0,908	13
0,1.....	0,054	53	2,6.....	0,921	10
0,2.....	0,107	53	2,7.....	0,931	10
0,3.....	0,160	53	2,8.....	0,941	9
0,4.....	0,213	51	2,9.....	0,950	7
0,5.....	0,264	50	3,0.....	0,957	6
0,6.....	0,314	49	3,1.....	0,963	6
0,7.....	0,363	48	3,2.....	0,969	5
0,8.....	0,411	45	3,3.....	0,974	4
0,9.....	0,456	44	3,4.....	0,978	4
1,0.....	0,500	42	3,5.....	0,982	3
1,1.....	0,542	40	3,6.....	0,985	2
1,2.....	0,582	37	3,7.....	0,987	3
1,3.....	0,619	36	3,8.....	0,990	1
1,4.....	0,655	33	3,9.....	0,991	2
1,5.....	0,688	31	4,0.....	0,993	1
1,6.....	0,719	29	4,1.....	0,994	1
1,7.....	0,748	27	4,2.....	0,995	1
1,8.....	0,775	25	4,3.....	0,996	1
1,9.....	0,800	23	4,4.....	0,997	1
2,0.....	0,823	20	4,5.....	0,998	0
2,1.....	0,843	19	4,6.....	0,998	0
2,2.....	0,862	17	4,7.....	0,998	1
2,3.....	0,879	16	4,8.....	0,999	0
2,4.....	0,895	13	4,9.....	0,999	0
2,5.....	0,908		5,0.....	0,999255	

Supposons, par exemple, que dans la mesure des hauteurs au xtant un observateur ait pour erreur probable $r_1 = \pm 20''$. La probabilité de commettre une erreur positive ou négative, comprise en leur absolue entre 30″ et 40″, s'obtiendra de la manière suivante. ɔur $x = 30''$, $\frac{x}{r_1} = \frac{30}{20} = 1,5$. En face du nombre 1,5, la Table ɔnne P = 0,688. Concluons que, sur 1000 observations, il y en aura 88 pour lesquelles l'erreur sera 30″ ou au-dessous. Pour $x = 40''$ on ırait $\frac{x}{r_1} = 2$, P = 0,823, et par suite il y aura 823 observations sur ɔoo où l'erreur sera de 40″ ou au-dessous. La différence

$$823 - 688 = 135$$

ontre que, dans une série de 1000 observations, il ne devra s'en ouver que 135 entre les limites assignées, ou 13,5 sur 100.

On voit aussi, par la même Table, que la probabilité de rencontrer dans une pareille série une erreur égale ou inférieure à 3 fois l'erreur probable, c'est-à-dire à 1′, sera 0,957. Il y aura donc, sur 1000 observations, 957 erreurs de cet ordre. Au-dessus, il n'y en aura que 4 sur 100, probablement pas 1 seule sur 10.

Cependant, si sur 10 observations il se présentait une erreur égale ou un peu supérieure à 1′, il ne faudrait pas se croire autorisé à la rejeter pour cela, car la probabilité d'une telle erreur est faible ($\frac{43}{1000}$), mais non pas évanouissante. Nous reviendrons plus loin sur ce sujet.

L'application la plus remarquable qu'on puisse faire de cette Table est de calculer, de très près, toute la série d'erreurs qu'un observateur peut commettre dans un ensemble de mesures dont la précision est assignée d'avance par la connaissance de l'erreur probable. Supposons, par exemple, qu'un tireur au pistolet ait pour erreur moyenne $\varepsilon_1 = 18^{cm},3$, ou pour erreur probable $r_1 = 12^{cm},33$ (c'est le cas du tireur cité par le général Didion). On demande d'après cet unique renseignement, combien de ses coups sur 100 s'écarteront de 0^{cm} à 5^{cm} de la cible, combien de 5 à 10, de 10 à 20, etc., et combien d'écarts atteindront 56^{cm}. L'argument de la Table étant $\frac{x}{r_1}$, on calculera d'abord ces limites d'écarts en divisant par $r_1 = 12,33$, ce qui donne :

Écarts ou valeurs de x.	Argument ou valeurs de $\frac{x}{r_1}$.
5	0,406
10	0,810
15	1,217
21	1,707
26	2,109
30	2,515
40	3,245
45	3,65
56	4,54

Avec ces valeurs de l'argument, on entre dans la Table et l'on interpole par simples parties proportionnelles pour avoir les valeurs de P. Celles-ci doivent être multipliées par le nombre de coups, qui est ici 100. On trouve ainsi :

Valeurs de x.	Valeurs de $P \times 100$.
5	21,5
10	41,6
15	58,6
21	74,8
26	84,5
31	91,0
40	97,1
45	98,6
56 et au-dessus	21,5

Chacun des nombres de la seconde colonne exprime le nombre de coups sur 100 dont les écarts seront compris entre 0 et 5, entre 0 et 10, entre 0 et 15, etc. En retranchant chaque nombre du suivant, on a finalement :

Limites des écarts.	Nombre théorique des coups.	Nombre réel.
De 0^{cm} à 5^{cm}	21,5	24
» 5 » 10	20,1	20
» 10 » 15	17,0	18
» 15 » 21	16,2	11
» 21 » 26	9,7	10
» 26 » 31	6,5	8
» 31 » 40	6,1	5
» 40 » 45	1,5	3
» 45 » 56	1,2	1
Au-dessus de 56^{cm}	0,9	0

Ainsi, pour apprécier la précision d'une arme, il n'est pas nécessaire de recourir aux registres de tir et d'examiner la série des écarts constatés : il suffit de connaître l'erreur probable de l'arme placée dans les mains d'un tireur exercé, puisque cette erreur probable nous permet de reconstituer par le calcul, avec une exactitude bien suffisante, toute la série des écarts qui auront lieu sur un nombre donné de coups, non pas sans doute dans l'ordre où ces écarts se produiront effectivement, mais avec leur vraie grandeur. En appliquant aux observations astronomiques de Bradley, déjà citées, le même procédé, on retrouverait encore plus exactement tout le Tableau des erreurs comprises entre 0^s et $0^s,1$, entre $0^s,1$ et $0^s,2$, etc.

Démonstration de la méthode des moindres carrés.

Bien que l'expression $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$ ne représente pas, avec toute la rigueur mathématique du mot, la probabilité d'une erreur x dans un système de mesures de précision h, elle en est une expression assez approchée, comme on vient de le voir, pour qu'il soit permis d'en tirer quelques conséquences. Soit donc un système de m équations entre des inconnues et les mesures qui doivent servir à les déterminer. Supposons qu'un système quelconque de valeurs assignées à ces inconnues produise, dans les équations de condition, les résidus ε, ε', ε'', ... Les probabilités de ces erreurs prises chacune à part seront

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon, \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon'^2} d\varepsilon, \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon''^2} d\varepsilon, \quad \ldots,$$

et la probabilité de leur apparition simultanée sera, d'après le théorème de Moivre, le produit de leurs probabilités respectives, c'est-à-dire

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}} d\varepsilon\right)^m e^{-h^2(\varepsilon^2+\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots)}.$$

Les valeurs les plus probables des inconnues sont évidemment celles qui rendront cette expression maximum, c'est-à-dire qui rendront minimum la somme $\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \ldots$; en d'autres termes, ce sont celles qui donneront la moindre valeur possible à la somme des carrés des résidus. C'est justement la condition à laquelle satisfait la méthode de Legendre.

Objections qu'on fait communément à la méthode des moindres carrés.

Bien que le Calcul des probabilités soit d'origine française, ainsi que la méthode que nous venons d'exposer, leur emploi pour la discussion des observations est peu connu dans notre pays; nous avons dû adopter ici les notations et les règles de Gauss, qui sont universellement appliquées hors de France à toutes les sciences

de mesures et d'expériences. Le discrédit qui semble frapper chez nous la méthode de Legendre, complétée par Gauss, tient à deux préjugés auxquels nous allons tâcher de répondre. Le premier résulte de l'opinion que la méthode des moindres carrés ne s'applique légitimement qu'à un grand nombre d'observations. Le second s'appuie sur ce fait que parfois des éléments importants, obtenus par cette méthode avec une erreur probable très faible, ont été trouvés ultérieurement en défaut de quantités bien supérieures à ladite erreur probable.

Sur le premier point, personne n'a défini ce que l'on doit entendre par ce *grand nombre* d'observations qui seul justifierait l'emploi de la méthode de Legendre. Est-ce mille, cent mille, un million? En second lieu, ceux qui font l'objection n'hésiteraient pas un seul instant à appliquer à une dizaine d'observations ou même au plus petit nombre possible, c'est-à-dire à deux, la règle de la moyenne arithmétique, qui n'est pourtant qu'une forme particulière de la méthode générale. La question n'est pas dans le *grand nombre*, mais dans le *nombre suffisant* dont voici la définition : un ensemble de mesures ou d'équations de condition comporte légitimement l'application des méthodes précédentes, lorsque les résidus manifestent nettement la loi de probabilité des erreurs fortuites. Dans le cas contraire, cet ensemble ne peut conduire à aucune conclusion sérieuse; on n'est même pas en droit de lui appliquer la règle de la moyenne arithmétique. Nous allons citer un exemple où, avec 9 mesures, les méthodes peuvent être appliquées, et un autre où, avec 19, on ne peut pas même prendre une simple moyenne.

Dans le calcul relatif aux mesures du pendule en différents lieux de la Terre, nous trouvons, pour l'erreur probable d'une mesure isolée, $\pm 0^{mm},045$. Calculons d'après cela, au moyen de la Table des valeurs de l'intégrale définie, combien d'erreurs doivent tomber entre 0 et 0,05, entre 0,05 et 0,10, ... Nous aurons :

Entre 0,00 et 0,05.....	5 erreurs;	on en trouve	6
» 0,05 » 0,10.....	3 »	»	2
» 0,10 » 0,15.....	1 »	»	1
Au-dessus de 0,15.....	0,2 »	»	0

L'accord est suffisant, l'application de la méthode des moindres

carrés est légitime, les erreurs probables trouvées pour les valeurs attribuées aux inconnues donnent une idée exacte de leur précision.

S'il en était autrement, c'est-à-dire si la répartition des écarts différait très notablement des règles de probabilité, il faudrait en conclure que les observations, mesures ou expériences, sont viciées plus ou moins par quelque erreur systématique. En voici un exemple. Par une série de 19 expériences faites avec soin on a déterminé l'équivalent de l'hydrogène en prenant 100 pour celui de l'oxygène. Il s'agissait de savoir si cet équivalent doublé est entier ou fractionnaire. Voici les résultats :

	Écarts.		Écarts
12,546	— 32	12,522	— 8
12,480	— 34	12,551	— 37
12,547	— 33	12,490	— 24
12,491	— 23	12,490	— 24
12,480	— 34	12,533	— 19
12,496	— 18	12,551	— 37
12,550	— 36	12,562	— 48
12,550	— 36	12,476	— 42
12,508	— 6	12,480	— 34
12,489	— 25		
	Moyenne.....	12,514	

D'après ce résultat, il ne saurait être question ici d'un nombre entier. Mais, en l'examinant de plus près, on trouve qu'à en juger par les écarts l'erreur probable d'une mesure isolée serait $= 0,0209$; par suite, sur 19 écarts nous en devrions trouver

4,8	entre 0,000 et 0,010	il y en a	»
4,3	0,010 » 0,020	»	»
3,5	0,020 » 0,030		4
2,7	0,030 » 0,040	»	9
1,6	0,040 » 0,050	»	»
2,1	au-delà de 0,050		0

Ces écarts ne suivant nullement la loi de probabilité des erreurs accidentelles, il faut en conclure, ou que le nombre des expériences est beaucoup trop petit et rend illusoire l'évaluation de

l'erreur probable, ou qu'elles sont entachées de quelque erreur systématique. Dans l'un et l'autre cas, la moyenne ne donne pas le résultat le plus probable et la question qu'il s'agissait de décider par ces expériences reste en suspens.

Passons à la seconde objection. De la discussion des passages de Vénus sur le Soleil observés en 1761 et 1769, M. Encke a déduit :

$$\text{Parallaxe du Soleil} = 8'',57116 \pm 0'',0370.$$

D'après cette petite erreur probable il y aurait un contre un à parier que la vraie parallaxe est comprise entre

$$8'',53 \text{ et } 8'',61.$$

Or, nous savons aujourd'hui que la vraie parallaxe $8'',813$ tombe bien en dehors de ces limites. L'erreur, $0'',24184$, est égale à $6,362$ fois l'erreur probable $0'',037$. La Table précédente ne va pas jusqu'à cette valeur de l'argument $\frac{x}{r_1}$, mais il est aisé de faire le calcul par la série donnée plus haut. On trouve alors pour la probabilité d'une telle erreur $0,00001$ (¹). Ainsi, à s'en tenir à l'erreur probable assignée par M. Encke à son résultat, il y aurait cent mille à parier contre un qu'il n'est pas en erreur de $0'',24184$, et pourtant telle est la correction que nous sommes obligés de lui faire subir.

De même Newton avait déduit, des mesures exécutées par Pound sur les satellites de Jupiter, la masse de cette planète $= \frac{1}{1067}$. Plus tard Bouvard la détermina par une tout autre voie, en construisant les Tables de Jupiter et de Saturne sur la théorie de Laplace. Il trouva $\frac{1}{1070}$. L'accord était remarquable. Laplace, appliquant ici le Calcul

(¹) Cette série est trop lentement convergente pour des valeurs un peu fortes de hx. Laplace a donné pour ce cas l'intégrale définie sous la forme d'une fraction continue fort aisée à calculer :

$$1 - \frac{e^{-h^2x^2}}{hx\sqrt{\pi}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\alpha}{1 - \cfrac{2\alpha}{1 - \cfrac{3\alpha}{1 - \cdots}}}},$$

des probabilités, trouva qu'il y avait un million à parier contre un que la valeur $\frac{1}{1070}$ n'était pas en erreur de $\frac{1}{100}$. Or, peu d'années après, les astronomes étaient obligés de l'augmenter du double de cette dernière quantité et de porter cette masse à $\frac{1}{1050}$.

Certes il y a eu déception pour les astronomes dans ces deux cas, mais il n'y a pas lieu d'en accuser l'emploi de la méthode des moindres carrés ou du calcul des chances. Nous ne saurions trop répéter que cet emploi n'est légitime que dans le cas où les observations ont été purgées de toute erreur systématique sensible. Or on a reconnu que Pound avait négligé certaines corrections instrumentales; que Bouvard, dans ses immenses calculs, n'avait pas tenu un compte absolument exact de toutes les inégalités du mouvement de Saturne; enfin que les observations des passages de Vénus sur le Soleil sont entachées d'erreurs systématiques fort singulières que nous aurons lieu de discuter plus tard. L'introduction de la méthode des moindres carrés dans les calculs a rendu, aux astronomes, l'immense service de fixer énergiquement leur attention sur la recherche et l'élimination préalable de ces erreurs dangereuses.

---

dans laquelle $\alpha = \frac{1}{2h^2x^2}$. Appliquons-la au cas actuel. Les réduites successives sont $\frac{1}{1+\alpha}$, $\frac{1+2\alpha}{1+3\alpha}$, $\frac{1+5\alpha}{1+6\alpha+5\alpha^2}$, $\frac{1+9\alpha+8\alpha^2}{1+10\alpha+15\alpha^2}$, ...

En posant $hx = 0,4769 \times 6,362$, on trouve, par la dernière réduite,

$\log hx$.....	0,49559	$\log \log e$.....	9,63778	$\log \frac{e^{-h^2x^2}}{hx\sqrt{\pi}}$.	5,00024
$\log h^2x^2$....	0,99118	$\log h^2x^2$.....	9,99118		
$\log 2$.....	0,30103		0,62896	log 4e réd.	9,97999
$\log \alpha$.....	8,70779	Nombre — $\log e^{h^2x^2}$.	4,25560		4,98023
$\log \alpha^2$.....	7,41558	$\log hx$.....	0,49559	Nombre...	0,0000096
4e *réduite.*		$\log \sqrt{\pi}$.....	0,24857	1 — nomb.	0,9999904
			4,99976		
log num....	0,17027	C'log.....	5,00024		
log dén.....	0,19028				
log 4e réd..	9,97999				

La valeur de l'intégrale définie pour $\frac{x}{r_1} = 6,362$ est donc 0,9999904: on voit combien le reste de l'aire de la courbe, c'est-à-dire 0,0000096, depuis l'abscisse 6,362 jusqu'à l'infini, est déjà petite.

Conclusion.

Le Calcul des probabilités, appliqué à la théorie des mesures ou des observations, a l'avantage de confirmer ce que le bon sens nous avait appris déjà sur la meilleure manière de combiner les observations; mais il ne nous donne aucun moyen de les corriger ou de choisir entre elles les bonnes pour rejeter les mauvaises. La Table précédente nous apprend bien que la probabilité d'une erreur, égale ou supérieure à 3 fois l'erreur probable η, est $1 - 0,957 = 0,043$, qu'elle n'est que 0,007 pour une erreur égale ou supérieure à 4η, en sorte que la première ne doit se présenter que 43 fois et la seconde 7 fois sur 1000 observations; mais elle ne nous apprend pas dans quelle partie d'une série de mesures cette erreur de grandeur exceptionnelle devra se trouver.

Il arrive souvent, à la mer, que les observations de hauteur, par exemple, deviennent fort difficiles quand la mer est très agitée ou l'horizon brumeux. Alors, dans une série d'une dizaine d'observations, on en rencontre de très discordantes et l'on éprouve une forte tentation de les laisser de côté, parce qu'elles gâteraient, dit-on, la moyenne. On a proposé pour cela un criterium qui consiste à exclure, sur n observations, celles dont la probabilité, estimée par leurs écarts avec la moyenne, tomberait à $\frac{1}{n}$ et au-dessous. Par exemple, ayant réuni 20 observations d'un phénomène et obtenu, en les comparant une à une à la moyenne, une évaluation de l'erreur probable η, on rejetterait toutes celles dont la probabilité serait de $\frac{1}{20}$ seulement, ou de 0,05. La Table précédente montre que ce sont celles dont les écarts atteignent ou dépassent le triple de l'erreur probable. Alors on referait la moyenne des observations conservées en obtenant ainsi un accord plus encourageant. Mais c'est là un pur enfantillage. Si la moyenne des observations non triées est déjà assez précise pour faire apprécier l'erreur probable des observations, pourquoi y toucher? Ensuite n'est-ce pas par une vue tout à fait arbitraire du sujet qu'on préfère la fraction $\frac{1}{n}$ à d'autres fractions, telles que $\frac{2}{n}$ ou $\frac{1}{2n}$? Une règle bien plus prudente est celle que suivent les astronomes; elle consiste à ne

jamais attendre le résultat d'un calcul pour trier leurs observations. Ils ne rejettent que celles qui sont marquées douteuses (deux points :) ou très douteuses (quatre ::) par l'observateur lui-même, au moment même de l'observation.

Si nous avons insisté longuement sur la méthode des moindres carrés, c'est qu'il est bon de la connaître et de savoir l'appliquer au besoin. C'est un moyen puissant de discussion dont les hommes de science tirent parti lorsqu'ils veulent savoir jusqu'à quel point leurs théories, leurs formules s'adaptent à la réalité, ou bien lorsqu'ils veulent obtenir, avec toute la précision possible, des constantes fondamentales dans la Science. Par exemple, lorsqu'on a réuni les mesures géodésiques d'arcs de méridien effectuées à grands frais, sur tous les continents, afin d'étudier la vraie figure du globe, c'est par la méthode des moindres carrés qu'on devra traiter les équations de condition, dût le calcul durer des mois entiers et exiger tout un personnel de calculateurs.

LIVRE QUATRIÈME.

GÉODÉSIE.

Nous savons maintenant déterminer les coordonnées géographiques d'un point quelconque du globe avec une très grande exactitude. En reportant ces coordonnées sur un globe, ou sur une Carte par des procédés géométriques, on obtiendra ainsi la représentation de la Terre entière ou d'une de ses parties, au moyen d'un certain nombre de points bien déterminés, et l'on comblera les intervalles à l'aide d'opérations purement topographiques.

Il y manquerait encore l'échelle. Pour l'avoir, il faudrait mesurer le rayon de la Terre. Le procédé le plus simple consisterait à observer, comme on le fait pour les astres à dimensions sensibles, le diamètre angulaire de la Terre vue d'une station de hauteur connue. Soient h l'altitude de la station au-dessus de la mer, Δ le diamètre angulaire du globe, r son rayon ; on a

$$\frac{r}{r+h} = \sin\tfrac{1}{2}\Delta.$$

Cet angle $\frac{1}{2}\Delta$ n'est autre chose que le complément de la dépression d de l'horizon du spectateur placé à l'altitude h. Il s'obtient, sur mer, avec une certaine précision, parce qu'alors les contours du globe terrestre apparaissent avec netteté, sans être altérés par les inégalités du sol. On déduit de cette relation

$$\frac{r}{r+h} = \cos d, \quad \text{d'où} \quad 2\sin^2\tfrac{1}{2}d = \frac{h}{r+h}.$$

En tenant compte de la réfraction géodésique, dont la constante est m, et en négligeant h au dénominateur vis-à-vis de r, cette for-

mule devient, comme on le verra plus loin,

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}d = \frac{m-1}{m}\,\frac{h}{r}.$$

Les élèves de l'École navale de Brest se sont exercés à mesurer ainsi la dépression de l'horizon de la mer d'une hauteur de 75^m; ils ont trouvé $d = 15'30''$. Voici le calcul de r en donnant à m la valeur 8, trouvée page 116 :

$\log h$	1,87506
$\log \frac{7}{8}$	9,94201 — 10
$C^t \log 2$	9,69897 — 10
$C^t \log \sin^2 \frac{1}{2} d$	5,29394
$\log r$	6,80998

$$r = 6\,456\,000^m.$$

Ce nombre est un peu trop fort. On obtiendrait plus d'exactitude en opérant sur le sommet d'une haute montagne au milieu de l'Océan, telle que le pic de Ténériffe (3710^m), et non seulement on mesurerait ainsi le rayon de la Terre, mais on en déterminerait très passablement l'aplatissement, car dans le sens du méridien on aurait $d = 1°50'11''$, tandis que dans le sens transversal on trouverait $1°49'43'$. La Terre n'étant pas une sphère parfaite, mais un ellipsoïde de révolution légèrement aplati aux pôles, le cône formé par les rayons visuels tangents à son contour ne serait pas un cône droit à base circulaire, mais un cône à base légèrement elliptique.

Ce procédé n'a jamais été sérieusement appliqué à cause des petites anomalies que présente parfois la réfraction géodésique. Un moyen beaucoup plus exact consiste à mesurer la longueur s d'un arc de méridien quelconque; on en détermine ensuite l'amplitude angulaire vue du centre de la Terre. Celle-ci sera la différence des colatitudes λ et λ' des extrémités de l'arc s. On aura enfin, r désignant le rayon de la Terre, $r(\lambda - \lambda') = s$, relation où l'angle $\lambda' - \lambda$ devra être exprimé en parties du rayon, c'est-à-dire converti en secondes et divisé par $206\,265''$.

Quant aux petites irrégularités du sol solide et au relief des continents, on les déterminerait par une opération spéciale, à savoir un nivellement rapporté au niveau de la mer. C'est en effet la sur-

face des mers, prolongée idéalement par-dessous les continents, qu'on doit considérer comme la surface mathématique du globe terrestre, car elle est en chaque point perpendiculaire à la direction de la verticale, du moins si l'on néglige les petites dénivellations accidentelles ou périodiques de l'Océan dues aux vents et aux marées.

Il est aisé d'ailleurs de se faire une idée du peu d'importance de ces irrégularités quand on les rapproche des dimensions du globe lui-même. Représentez-le par la circonférence qui figure, sur la *Pl. I* de cet Ouvrage, l'orbite d'Uranus. Elle a $0^m,73$ de rayon. Eh bien, si vous donniez au trait une largeur un peu plus forte, de $\frac{1}{4}$ de millimètre environ, non seulement les plus hautes montagnes et les profondeurs des mers seraient comprises, à cette échelle-là, dans l'épaisseur de ce trait, mais encore la petite déformation due à l'aplatissement. Nous sommes donc en droit de les négliger provisoirement, et de considérer tout d'abord la Terre comme une sphère dont la surface mathématique se manifeste le mieux sur les mers.

CHAPITRE XIII.

ANCIENNES MESURES DE LA TERRE.

Lorsque l'expédition d'Alexandre dans les Indes eut ouvert l'Orient et élargi les notions géographiques jusque-là fort étroites des Grecs, la question des dimensions de la Terre prit naissance. Il fallait s'en faire une idée pour agencer les nouveaux documents qu'on avait recueillis en parcourant l'Asie presque jusqu'à la Chine. Mais, en l'absence de déterminations astronomiques, on n'avait guère que des évaluations grossières des distances en journées de marche, d'après les armées ou les dires des voyageurs. Aristote portait à 400 000 stades le tour entier de la Terre, on ne sait sur quels fondements. En admettant 180^m pour le stade olympique, cette évaluation donne 72 millions de mètres au lieu de 40 millions.

Mesure d'Ératosthènes.

La première mesure réelle, scientifiquement exécutée, est celle d'Ératosthènes, astronome qui vivait 250 ans avant J.-C. Il avait été appelé à Alexandrie par Ptolémée Philadelphe. Il opéra, comme nous venons de le dire, en mesurant un arc s d'un méridien et en le comparant avec son amplitude céleste $\lambda' - \lambda$. L'arc choisi était énorme; il s'étendait entre les parallèles extrêmes de l'Égypte, ceux d'Alexandrie et de Syène. Ce pays avait été obligé de tout temps, par la constitution de la propriété et le grand phénomène périodique de l'inondation du Nil, d'établir un cadastre régulier sur tout son territoire. Du temps même d'Ératosthènes le gouvernement avait organisé une corporation d'arpenteurs qui mesuraient au pas toutes les distances dans la partie habitée et cultivée de la vallée du Nil, c'est-à-dire depuis la Méditerranée jusqu'à la première cataracte, près de Syène. Ce géographe était donc en possession de documents

précis pour déterminer, en tenant compte de l'orientation [1], c'est-à-dire dans le sens du méridien, la distance de ces parallèles extrêmes. Il trouva, en nombres ronds, 5000 stades. Avec les éléments de l'ellipsoïde terrestre que nous obtiendrons plus loin, cette même distance est de $797\,760^{m}$. Ainsi ce stade-là serait de $159^{m},6$. Le stade valait toujours 600 pieds; mais, comme le pied variait d'un pays à l'autre, cause de confusion qui n'a pris fin qu'à l'établissement du système métrique, on est souvent incertain sur la valeur des stades. Ici le pied employé devait être celui du cadastre égyptien, d'environ $0^{m},27$: et, en effet, $159^{m},6$ divisé par 600 donne $0^{m},266$. Nous avons donc une idée nette de la partie géodésique de l'opération d'Ératosthènes.

Quant à la partie astronomique, elle consistait à déterminer les colatitudes λ et λ' d'Alexandrie et de Syène. Ératosthènes mesura à Syène et à Alexandrie, à l'aide du gnomon, la distance zénithale du Soleil à l'époque d'un solstice d'été; il trouva ainsi $z = 7^{\circ}12'$ et $z' = 0$ pour les deux villes. De là $\lambda' - \lambda = 7^{\circ}12'$; par suite, en supposant la Terre sphérique, l'arc de $1^{\circ} = \frac{5000 \text{ st.}}{7,2} = 694,4$ stades. Il a donné 700 stades en nombres ronds. Le tour de la Terre serait donc de 250 000 stades ou de $250\,000 \times 600 \times 0^{m},27 = 40\,500\,000^{m}$, au lieu de 40 millions de mètres d'après les évaluations modernes. Nous ne saurions aujourd'hui apprécier exactement l'erreur commise, faute de connaître, avec une précision suffisante, la valeur du pied égyptien il y a deux mille ans; mais, au point de vue astronomique, nous possédons des moyens de contrôle sérieux. La *Connaissance des Temps* donne pour Alexandrie et Syène

λ.....	$58^{\circ}.48'$
λ'.....	65.55
Différence..	$7.\ 7$

L'erreur de l'amplitude déterminée par Ératosthènes n'est donc que de $5'$.

Voici une autre vérification plus délicate. Nous verrons, dans le deuxième Volume, que le gnomon donnait la distance zénithale du bord supérieur du Soleil et non celle du centre. L'erreur, d'envi-

[1] La différence de longitude des deux villes est de $2^{\circ}59'$.

ron 16′, disparaît ici dans la différence des distances zénithales, mais il en faut tenir compte si l'on veut déterminer la colatitude. Les z observés à Alexandrie et à Syène sont donc 7° 28′ et 0° 16′. Pour obtenir les δ correspondants du Soleil à l'instant du solstice d'été, il faut connaître l'obliquité de l'écliptique. Elle était de 23° 28′ 18″ en 1750 et diminue de 48″ par siècle. Deux mille ans auparavant elle était donc de 23° 44′. Ainsi, au solstice d'été, le δ du Soleil était de 66° 16′. Par la formule $\lambda = \delta - z$ on trouve

λ d'Alexandrie....	66° 16′ — 7° 28′ = 58° 48′	au lieu de	58° 48′
λ' de Syène.....	66° 16′ — 0° 16′ = 66° 0′	»	65° 55′

Ne connaissant pas le point précis des deux villes où l'observation a été faite, il peut rester une incertitude de 1′ à 2′ sur ces colatitudes ; mais cette comparaison suffit à prouver que toute l'opération d'Ératosthènes a été faite avec soin, et même avec plus d'exactitude qu'on n'en trouve dans les meilleures observations de cette époque reculée. Il est bon de rappeler à cette occasion qu'Ératosthènes a été le véritable créateur de la Géographie générale; le premier il a su apprécier l'extension du vaste continent européo-asiatique depuis les îles Canaries, à l'ouest, jusqu'aux côtes de la Chine, à l'est; il estimait que cette vaste terre, centralement traversée dans le sens d'un parallèle par une chaîne de hautes montagnes, ne dépassait pas 180° de longitude, ce qui laissait entièrement inconnue et inexplorée l'autre face du globe terrestre occupée par le Pacifique, l'Amérique et l'Atlantique.

Prétendue mesure de Posidonius.

Ératosthènes avait assigné, pour la distance de Rhodes à Alexandrie, 3750 stades. Voici les coordonnées de ces deux villes :

	λ.	L.
Rhodes.....	53° 33′, 1	25° 53′, 8
Alexandrie....	58° 48′, 2	27° 31′, 2

Par la formule

$$\cos a = \cos\lambda \cos\lambda' + \sin\lambda \sin\lambda' \cos(L' - L),$$

on trouve pour la distance a, en arc de grand cercle, 5° 25′, 2. Avec

6,80320 pour le logarithme du rayon de courbure du méridien à la colatitude moyenne de 55°, nous aurons $60127 0^m$ pour cette distance. Par conséquent le stade valait 160^m et le pied $0^m,267$. Nous avions trouvé tout à l'heure $0^m,266$. C'était donc le même pied égyptien et le même stade de 160^m que nous avons déjà rencontrés. La précision de cette nouvelle mesure montre que ce géographe s'était servi, pour l'établir, des traversées les plus directes de Rhodes à Alexandrie et que, suivant toute probabilité, les marins de cette époque se servaient déjà fort habilement du loch et de l'ampoulette pour mesurer le chemin parcouru en mer. Mais c'est là la seule donnée valable de la prétendue mesure de la Terre qu'on attribue à Posidonius.

Ce dernier part de la remarque fausse que l'étoile Canopus (1re grandeur) ne fait que raser l'horizon de la mer à Rhodes; δ étant la distance polaire de l'étoile, on aurait donc, en négligeant la réfraction, inconnue à cette époque,

$$\lambda = \delta - 90^\circ.$$

D'autre part, Posidonius affirme que cette étoile avait 7°30′ de hauteur, à Alexandrie, au moment de son passage au méridien; par conséquent,

$$\lambda' = \delta - 82^\circ 30',$$

toujours en négligeant la réfraction. Il en a donc conclu

$$\lambda' - \lambda = 7^\circ 30',$$

ce qui donne

$$\frac{3750}{7,5} = 500 \text{ stades au degré},$$

au lieu des 700 stades d'Ératosthènes. L'erreur est des $\frac{1}{10}$, près de moitié du résultat trouvé.

Il est aisé aujourd'hui d'obtenir, par un calcul de précession qu'on trouvera dans le second Volume, la coordonnée δ de Canopus à l'époque de Posidonius. Elle était de 142°30′. Par conséquent, au lieu de raser l'horizon à Rhodes, elle s'y élevait, au méridien, à une hauteur de 1°24′,5. Au lieu d'avoir à Alexandrie, à sa culmination, une hauteur de 7°30′, elle ne s'élevait qu'à 6°26′. Évidemment la première observation repose sur de vagues ouï-dires, et la seconde n'a pas été faite, car on ne se trompait pas, à cette époque, d'un degré entier. Il est probable que Posidonius aura calculé cette

hauteur à l'aide des coordonnées écliptiques observées à Rhodes par Hipparque un siècle auparavant, car Hipparque, ne connaissant pas la réfraction, a donné pour cette étoile, mal placée, une distance au pôle de l'écliptique assez erronée. Quoi qu'il en soit, l'erreur de l'amplitude astronomique de l'arc Rhodes-Alexandrie résulte de ce fait :

$$\begin{array}{ll} \text{Rhodes} \ldots\ldots\ldots & \lambda = 53^\circ.33',1 \\ \text{Alexandrie} \ldots\ldots & \lambda' = 58.48,2 \\ \hline & \lambda' - \lambda = 5.15,1 \end{array}$$

$\lambda' - \lambda = 5^\circ 15'$ et non $7^\circ 30'$. L'erreur est ainsi de $2^\circ \frac{1}{4}$, c'est-à-dire des $\frac{1}{10}$.

Évaluation de Ptolémée.

Nous arrivons à l'évaluation de Ptolémée vers l'an 150. Ce grand astronome se borne à dire qu'il a repris la mesure d'Ératosthènes et qu'il a obtenu le même résultat. Seulement il adopte aussi 500 stades en nombres ronds pour le degré. Le stade de l'auteur de l'*Almageste* était de 600 pieds philétériens. Or ce pied est de $0^m,36$ au lieu de $0^m,267$. Pour faire la conversion il a dû multiplier 700 par $\frac{0,267}{0,36}$, ce qui donne 515 stades, ou 500 en nombres ronds.

Vérification de l'évaluation de Ptolémée par les Arabes.

Cette évaluation a été confirmée par les astronomes arabes qui mesurèrent, en 827, un arc de 1° dans les plaines de la Mésopotamie. Ils trouvèrent 56 milles et conclurent qu'ils avaient vérifié ainsi le nombre de Ptolémée. Le mille arabe étant d'environ 2100^m, leur arc avait donc $117\,600^m$, ce qui, à raison de 500 stades au degré, donne 235^m au stade. C'est grossièrement le stade philétérien de Ptolémée (216^m), et la différence doit tenir à notre évaluation actuelle du mille arabe du temps du calife Almamoun.

Mesures modernes.

En résumé, l'antiquité ne nous a légué qu'une seule mesure sérieuse, celle d'Ératosthènes. Elle a suffi pour donner aux géo-

graphes grecs une idée assez juste des proportions de l'Europe et de l'Asie vis-à-vis des parties inconnues du globe. Le moyen âge n'a rien tenté dans cette voie; les notions géographiques s'y sont même oblitérées au point de faire croire à Christophe Colomb qu'il atteindrait l'Asie en franchissant au plus une centaine de degrés vers l'ouest à travers l'Atlantique. La découverte de l'Amérique (1492), due à ce grand homme, donna un nouvel essor à la navigation et rendit de plus en plus nécessaire aux marins la connaissance des dimensions de notre globe. Il est probable que les premiers navigateurs au long cours se servaient de l'évaluation de Ptolémée pour obtenir la valeur de 1° ou de 1′ terrestre en unités de mesure modernes.

Fernel, Snellius, Norwood.

Ce n'est, en effet, qu'au courant du siècle suivant, cinquante-huit ans après la découverte de l'Amérique, qu'on voit un premier essai de mesure directe. Le médecin Fernel détermina fort exactement en 1550, par ses propres observations astronomiques, l'amplitude de l'arc méridien de 1° compris entre Paris et Amiens. Il en mesura la longueur par un procédé fort ingénieux dont on pourrait tirer aujourd'hui bon parti sur les lignes de chemin de fer. Ce procédé consistait à adapter aux roues de sa voiture un compteur et à enregistrer ainsi le nombre de tours de roue dans un voyage de Paris à Amiens, sur une route à très peu près droite et dirigée exactement du nord au sud. Il mesura ensuite avec soin la circonférence de ses roues, et, après avoir tenu compte des petites inflexions de la route, il trouva 57 070^{T} pour la longueur de ce degré. Le succès était complet, mais il ne paraît pas qu'on ait fait grande attention à ce beau résultat.

Snellius, géomètre hollandais, mesura, soixante-cinq ans plus tard, en 1615, la distance d'Alkmaar à Berg-op-Zoom et trouva 55 021^{T} au degré. L'erreur était de 2000^{T}, mais l'opération avait été conduite d'après des principes nouveaux qui furent adoptés plus tard par tous les géodésiens. La marche suivie consistait à rattacher les deux extrémités de l'arc à mesurer par une série de triangles juxtaposés, de manière à réunir deux triangles contigus par un côté commun. Snellius observait tous les angles de ces

triangles et mesurait l'un des côtés. Le calcul trigonométrique devait lui faire connaître la distance des points extrêmes.

En 1635, Norwood eut la patience de chaîner les 2°,5 qui séparent Londres de York, en relevant à la boussole les sinuosités du chemin. Il trouva 57 424^{t}. L'erreur est de 350^{t}. Mais en Angleterre même cette mesure semble être restée ignorée. Les géographes et les marins anglais se servaient du *statut mile* de 1760 *yards* comme d'un mille de 60 au degré, tandis que le degré vaut réellement 69 $\frac{1}{2}$ de ces *miles*. Cette erreur, d'un sixième environ, que les mesures de Fernel, de Snellius, de Norwood auraient dû faire éviter, a joué un grand rôle dans l'histoire de la Science; nous verrons qu'elle a failli étouffer dans son germe la découverte de l'attraction universelle.

Picard et les Cassini.

Toutes ces tentatives restèrent inaperçues ou ignorées jusqu'au jour où Picard se mit à l'œuvre avec des procédés nouveaux, d'une précision que l'on n'a guère surpassée depuis. Pour la première fois on vit des lunettes figurer dans les instruments de mesure, ce qui permit de décupler la grandeur des côtés des triangles et de centupler l'exactitude des mesures angulaires. A l'exemple de Snellius, Picard couvrit la méridienne de Paris à Amiens d'une chaîne de triangles. Il y rattacha une base mesurée à Juvisy avec un soin extrême, et calcula trigonométriquement la méridienne qui traversait sa triangulation. Telle est la méthode qu'on suit encore aujourd'hui et que nous allons exposer en détail. La mesure de Picard, exécutée en 1665, porta le degré à 57 060^{t}. Elle fut publiée quelques années plus tard; le jour même où elle parvint en Angleterre, Newton, armé de ce nombre, découvrait l'attraction universelle.

L'opération que nous venons de rappeler est la véritable origine de la Géodésie. Picard comprit que ces méthodes nouvelles s'appliqueraient parfaitement à la description géométrique d'un grand pays comme la France. Dans un Mémoire célèbre qu'il présenta à l'Académie, il proposait de conduire à travers la France entière, sur la méridienne de Paris, une chaîne de triangles allant de Dunkerque à Perpignan, et d'y rattacher toutes les triangulations

partielles destinées à relier à cette vaste base les autres contrées de la France. Ces triangles, à leur tour, seraient remplis par des opérations de détail purement topographiques, dont les erreurs inévitables ne devaient pas aller en s'accumulant, puisque, de distance en distance, les levers de détail s'appuieraient sur de nouveaux côtés de triangles parfaitement déterminés. Une telle Carte était de nature à fournir aux ingénieurs civils ou militaires toutes les données nécessaires à l'étude de leurs projets pour la construction des routes, des canaux de navigation ou d'irrigation, à l'administration pour l'assiette de l'impôt foncier, à la propriété territoriale pour l'exacte délimitation des terres. Colbert comprit la grandeur et l'utilité pratique des propositions de Picard et lui procura l'approbation du roi. En 1680, après la mort de ce savant académicien, Cassini et Lahire commencèrent ces grandes opérations. La méridienne centrale fut achevée en 1718, et la Carte de l'Observatoire, nommée souvent *Carte de Cassini,* fut terminée à la fin du siècle dernier.

Expéditions en Laponie et au Pérou.

La Géodésie devait servir la Science pure d'une manière non moins décisive. Les théorèmes d'Huygens sur la force centrifuge avaient donné à penser que la figure de la Terre, tournant autour d'un certain axe, devait, en vertu de cette rotation même, être aplatie aux pôles et renflée à l'équateur. Jupiter, dont la rotation est plus rapide, présentait en effet, dans les lunettes déjà puissantes de cette époque, un aplatissement très caractérisé. Newton, abordant cette question dans l'hypothèse d'une sphère liquide homogène, montra que l'aplatissement provenant d'une rotation semblable à la nôtre lui imprimerait un aplatissement de $\frac{1}{230}$. Il fit bien plus encore en rattachant, à l'existence de cet aplatissement, le phénomène grandiose de la précession des équinoxes [1].

Si la Terre avait ainsi une figure aplatie, la longueur des arcs de 1° d'amplitude devait aller en croissant de l'équateur aux

---

[1] C'était là une démonstration péremptoire de l'aplatissement. Avec une Terre sphérique il n'y aurait pas eu de précession; avec une Terre allongée, la précession se serait effectuée en sens inverse.

pôles. Cependant les mesures géodésiques alors en cours d'exécution en France ne semblaient pas favoriser cette conclusion. L'Académie des Sciences résolut cette question capitale au moyen de vastes opérations entreprises à la fois vers l'un des pôles, à l'équateur, et dans une région intermédiaire. Les résultats de ces expéditions, qui constituèrent définitivement la Géodésie et auxquelles se rattachent les noms de Maupertuis et de Clairaut (Laponie), de Bouguer et de Lacondamine (Pérou), furent ceux-ci :

Au Pérou, par 91°30′ de colatitude.....	$1^{\circ} = 56\,750^{T}$
En France, par 45° de colatitude.....	$1^{\circ} = 57\,069$
En Laponie, par 20° de colatitude.....	$1^{\circ} = 57\,422$

Les rayons conclus sont :

Au Pérou.....	$3\,251\,540^{T}$
En France.....	$3\,269\,850$
En Laponie.....	$3\,290\,000$

Ces nombres, qui représentent réellement les rayons de courbure de la courbe génératrice du sphéroïde terrestre, mettent en évidence la figure elliptique, ou du moins son aplatissement.

Les opérations ultérieures n'ont fait que confirmer et développer ces résultats, en montrant que la Terre est réellement un ellipsoïde de révolution (aplati) autour de son axe de révolution, c'est-à-dire autour de la ligne des pôles.

Cet aplatissement est d'ailleurs si faible, la figure mathématique de la Terre, définie par la surface des mers qui partout est perpendiculaire à la direction de la pesanteur, diffère si peu d'une sphère parfaite, que nous sommes en droit de le négliger tout à fait dans la description des procédés de la Géodésie; nous en tiendrons compte plus tard dans les calculs.

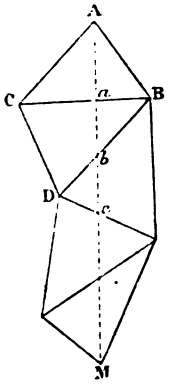
CHAPITRE XIV.

OPÉRATIONS GÉODÉSIQUES POUR LA MESURE D'UN ARC DE MÉRIDIEN.

Soit AM le méridien qu'il s'agit de mesurer :

1° On choisit de part et d'autre de cette ligne des points B, C, D, ... (*fig.* 72) de manière à former une chaîne de triangles dont

Fig. 72.



on mesure les angles et un côté, de sorte que, de proche en proche, le calcul de ces triangles fasse connaître tous les côtés.

2° En A, on détermine astronomiquement la direction du méridien, c'est-à-dire l'azimut CAa, ce qui permet de résoudre le triangle partiel ACa, et par suite, de proche en proche, tous les triangles partiels aBb, bDc, ... L'arc AM est la somme des côtés ou segments Aa + ab — bc + ...

3° On détermine les colatitudes λ et λ' des extrémités A et M de l'arc ainsi mesuré.

Les opérations géodésiques sur le terrain comprennent :

1° La reconnaissance du terrain, le choix des stations et la construction des signaux.

2° La mesure des angles des triangles.

3° La détermination d'un des côtés à l'aide de la mesure d'une base, et la jonction de cette base au susdit côté.

4° Cette base doit avoir été, au préalable, réduite au niveau de la mer par un nivellement conduit, de la base, à la mer la plus voisine.

Choix des stations. — Forme des triangles sphériques.

Pour résoudre le triangle ABC, où les trois angles et un côté a sont connus, on a

$$\sin b = \sin a \frac{\sin B}{\sin A}.$$

En différentiant logarithmiquement, on a

$$\frac{db}{\operatorname{tang} b} = \frac{da}{\operatorname{tang} a} + \frac{dB}{\operatorname{tang} B} - \frac{dA}{\operatorname{tang} A},$$

et, en donnant aux différentielles le sens d'erreurs probables,

$$\frac{\partial b}{\operatorname{tang} b} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\operatorname{tang} a}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\operatorname{tang} B}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\operatorname{tang} A}\right)^2}.$$

L'influence d'erreurs inévitables ∂A et ∂B dans la mesure des angles sera d'autant moindre que ces angles seront plus près de 90°. On satisfait autant que possible à cette condition en adoptant la forme équilatérale. Tout triangle dont l'un des angles différerait trop de 60° doit être rejeté.

En France, les triangles de premier ordre n'ont guère plus de dix lieues de côté. Leurs dimensions sont en effet limitées par cette condition que, de chaque sommet, il faut pouvoir viser les sommets voisins. En pays de plaine, cette condition exige la construction de signaux très élevés.

Si a et b sont les extrémités d'un côté, il faudra y élever deux signaux aA, bB, tels que : arc $ab < 3800^m(\sqrt{h} + \sqrt{h'})$, h, h' étant les hauteurs de ces signaux (*voir* p. 10). On en tire, en supposant $h = h'$,

$$h > \left(\frac{ab}{7600}\right)^2.$$

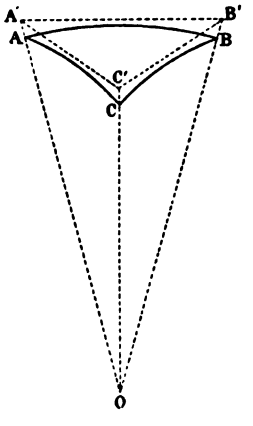
En pays de plaine, on aura donc les résultats suivants pour les hauteurs qu'il faut donner aux signaux, et même dépasser sensiblement afin que la trajectoire visuelle ne rase pas le sol de trop près.

Longueur des côtés.	Hauteur des deux signaux.
5 lieues	7^m
6 »	10
7 »	13,6
8 »	17,8
9 »	22,5
10 »	27,7

Mesure des angles des triangles.

On se servait autrefois du cercle répétiteur de Borda pour mesurer les angles plans du triangle formé par trois signaux consécutifs, A′, B′, C′ (*fig.* 73). Mais, comme on a besoin du triangle

Fig. 73.



sphérique ABC tracé sur la surface terrestre par les pieds des verticales des trois signaux, il fallait en déterminer les angles dièdres tels que B′A′OC′ = A. Pour cela, considérons le trièdre ayant pour arêtes la verticale A′Z et les côtés A′B, A′C′. En mesurant en A′ les distances zénithales z et z' des deux signaux B′ et C′, et l'angle B′A′C′ ou l'angle a du triangle plan, on aura A par la formule

$$\cos a = \cos z \cos z' + \sin z \sin z' \cos A.$$

Évidemment, l'angle dièdre A du triangle sphérique ABC n'est rien autre que la projection, sur le plan horizontal en A, de l'angle plan B'A'C'. La très petite différence $A - a$, que nous désignerons par x, peut se déduire de la formule précédente en profitant de ce que les distances zénithales z et z' diffèrent peu de 90°. Cette différence $A - A'$ se nomme *réduction de l'angle* B'A'C' *à l'horizon*. Pour l'obtenir, remplaçons z et z' par $90° - h$ et $90° - h'$, et A par $a - x$, nous aurons

$$\cos a = \sin h \sin h' - \cos h \cos h' \cos(a - x),$$

et nous développerons en série les sin et cos des petits angles h, h' et x en négligeant les termes du quatrième ordre en h et h', ainsi que les termes du deuxième ordre en x, parce que x est déjà du deuxième ordre (si h et h' sont du premier); on aura ainsi

$$\cos a = hh' + \cos a - x \sin a - \tfrac{1}{2}(h^2 - h'^2)\cos a.$$

En mettant $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}a$ à la place de $\cos a$, il vient

$$x \sin a = -\tfrac{1}{2}(h - h')^2 - (h^2 - h'^2)\sin^2\tfrac{1}{2}a.$$

Enfin, multipliant $\frac{1}{2}(h - h')^2$ par $\cos^2\frac{1}{2}a - \sin^2\frac{1}{2}a$, on obtient, après réduction,

$$x \sin a = \tfrac{1}{2}(h - h')^2 \sin^2\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}(h - h')^2 \cos^2\tfrac{1}{2}a,$$

ce qui revient à

$$x = \left(\frac{h - h'}{2}\right)^2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a - \left(\frac{h - h'}{2}\right)^2 \cot\tfrac{1}{2}a,$$

expression dont le deuxième membre doit être divisé par 206 265 pour donner x en secondes.

Mais on a remplacé le cercle répétiteur par le théodolite, qui donne immédiatement l'angle A du triangle sphérique compris entre les verticaux FA'C et FA'B' des deux signaux. Ce qu'on mesure ainsi, dans une triangulation, ce sont les angles d'une série de triangles sphériques tracés sur une même surface de niveau.

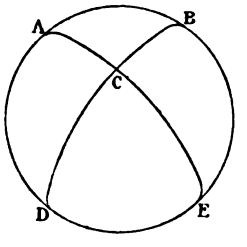
Autrefois on s'astreignait, pour avoir une vérification de chaque triangle, à mesurer les trois angles A', B', C' du triangle plan dont

la somme doit faire 180°. Aujourd'hui on mesure les trois angles dièdres A, B, C, dont la somme doit être de 180° + excès sphérique.

Excès sphérique.

Soit le triangle ABC (*fig.* 74); prolongeons AB de manière à compléter la circonférence. Prolongeons de même AC et BC jusqu'à cette circonférence. L'hémisphère supérieur de la sphère sur laquelle ce triangle est tracé se composera de la somme de quatre triangles, dont deux, ABC, DCE, forment le fuseau C, tandis que les deux derniers, joints chacun au triangle ABC, donnent les fuseaux A et

Fig. 74.



B. Cela posé, si l'on prend pour unité la surface de la sphère, un fuseau quelconque A sera représenté par $\frac{A}{360}$, tandis que le triangle ABC, rapporté à la même unité, sera représenté par $\frac{T}{4\pi r^2}$, en désignant par T la surface du triangle en mètres carrés, et par r le rayon de la sphère en mètres.

On aura donc, en remarquant que l'hémisphère a alors pour surface $\frac{1}{2}$,

$$\frac{A}{360^\circ} + \frac{B}{360^\circ} + \frac{C}{360^\circ} - \frac{2T}{4\pi r^2} = \frac{1}{2};$$

d'où

$$A + B + C = 180^\circ + \frac{360^\circ}{2\pi} \times \frac{T}{r^2} = 180^\circ + 206265'' \frac{T}{r^2}.$$

Ce terme $206265'' \frac{T}{r^2}$ est ce qu'on nomme *excès sphérique* $\mathcal{E}$; c'est l'excès de la somme des trois angles d'un triangle sphérique sur deux droits.

Dans les triangles géodésiques dont les côtés ont ordinairement

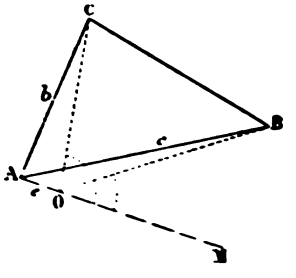
6, 8 ou 10 lieues, cet excès se réduit à 1″ ou 2″ ou 3″ (¹). On l'obtient aisément en calculant la surface du triangle en mètres carrés comme s'il était plan, et en réduisant en secondes le rapport de cette surface au carré du rayon. Si les angles du triangle ABC ont été bien mesurés, l'excès de leur somme sur 180° doit être égal à cet excès sphérique.

Signaux et réduction au centre de la station.

En pays de plaine, on est obligé de construire de hautes tourelles en maçonnerie, ou des charpentes très élevées en forme de pyramide, pour porter l'observateur et son instrument. On a renoncé depuis longtemps à se servir des clochers. La *fig.* 76 donne une idée assez nette de ces constructions.

L'important est que le pilier central sur lequel repose l'instrument n'ait pas de points de contact avec la pyramide ni avec le plancher sur lequel se place l'observateur. La petite tige verticale, sur laquelle l'observateur placé à la station voisine devra pointer sa lunette, doit se projeter bien exactement au centre du pilier, ce qu'on vérifie à l'aide du fil à plomb.

Fig. 75.



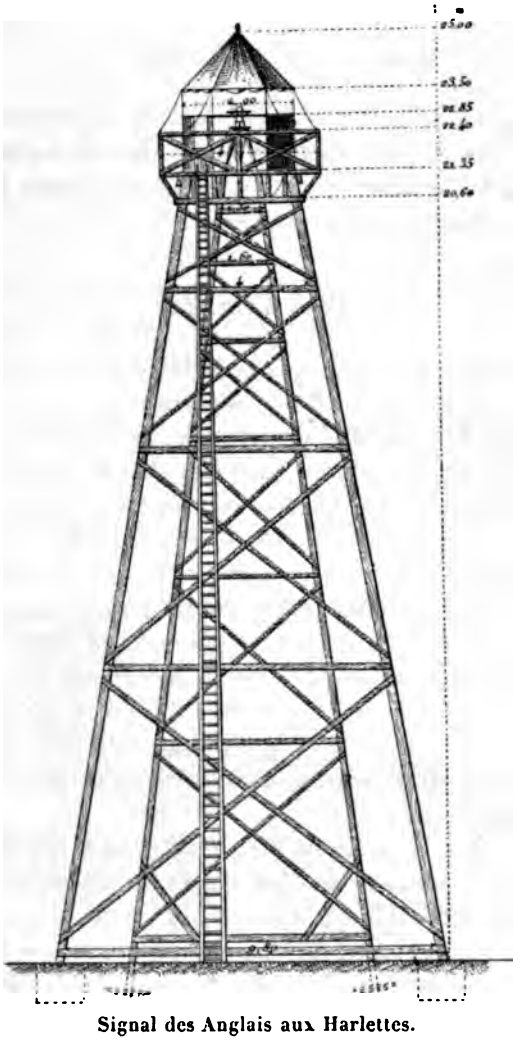
Si l'observateur est forcé de placer son instrument en dehors du centre ainsi déterminé, les angles mesurés par lui seront affectés d'une erreur d'excentricité dont nous avons déjà vu la théorie.

Soient A (*fig.* 75) le centre du signal, et AB, AC les directions à

(¹) On voit pourquoi les triangles sphériques de la Géodésie ne sont pas déterminés par leurs trois angles. Les formules [illegible] de la page 61 ne sont pas applicables, car $S = 90° - \frac{1}{2}C$ ne diffère de 90° que d'un angle excessivement petit, dont la grandeur est de l'ordre même des erreurs d'observation. Il faut donc au moins un côté, comme pour les triangles plans.

erver. Soit, de plus, O le point où l'observateur se trouve. Pour les directions des signaux seront OB et OC. Prenons pour ori- : des angles la droite OM déterminée par les points A et O. Pour

Fig. 76.



Signal des Anglais aux Harlettes.

ser de l'angle MOB à l'angle MAB, il suffit de retrancher du mier le petit angle β qui a son sommet en B, angle donné par la

relation

$$\frac{\sin\beta}{e} = \frac{\sin \mathrm{MOB}}{c};$$

d'où

$$\beta = 206265'' \frac{e}{c} \sin \mathrm{MOB},$$

par suite,

$$\mathrm{MAB} = \text{angle mesuré MOB} - \beta.$$

On corrigera ainsi toutes les directions observées autour du point O, et l'on obtiendra celles qu'on aurait observées si l'instrument avait pu être placé au signal A. Ce petit angle β se nomme *réduction au centre de la station*.

Tour d'horizon.

Il y a deux causes d'erreur à craindre dans les mesures angulaires de la Géodésie : les lents déplacements rotatoires de l'instrument sous la main de l'observateur, et ceux du pilier qui le supporte. Ce dernier cas se présente surtout dans les signaux élevés, comme celui des Anglais aux Harlettes (*fig.* 76), lorsque l'échafaudage central qui supporte le théodolite n'est pas suffisamment protégé contre l'action du Soleil. On y obvie matériellement en fixant, au pied même du théodolite, une lunette de repère qu'on dirige, au début des mesures, sur un signal éloigné (p. 109). A chaque mesure d'un angle horizontal [1], on consulte cette lunette : si le fil s'est écarté de l'objet visé, c'est que le pied du théodolite aura dévié d'un petit angle. On corrige l'erreur en ramenant la lunette de repère, et avec elle tout l'instrument, dans la direction première.

Mais on a aussi un précieux moyen de contrôle et de correction en achevant de mesurer tous les angles horizontaux autour de la station, même ceux qui ne doivent pas servir, car, leur somme devant être égale à quatre droits, si l'on trouve une légère différence, on est conduit, par les règles les plus simples du Calcul des

[1] Pour les angles verticaux le grand niveau du théodolite accuse tous les déplacements qui peuvent survenir dans le plan vertical où l'on observe et altérer les distances zénithales.

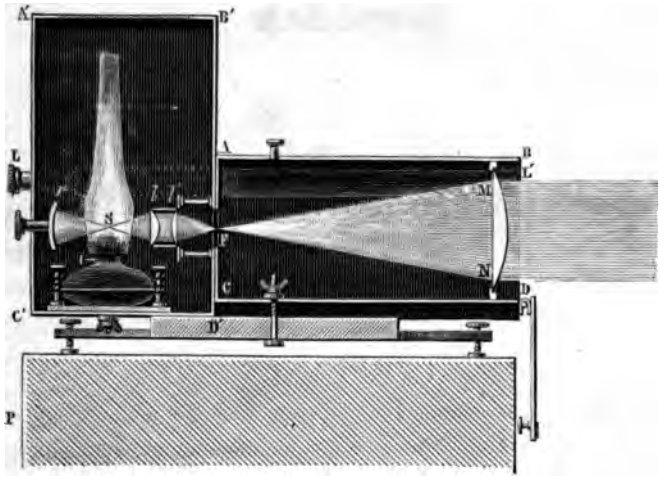
probabilités, à la répartir également entre tous les angles mesurés de manière à satisfaire à la condition susdite.

L'autre cause d'erreur est de nature plus complexe. Si les signaux eux-mêmes se déplacent peu à peu, périodiquement, dans le cours d'une journée, sous l'influence du Soleil (et c'est le cas de tous les clochers, dont les géodésiens ont dû renoncer à se servir), ou bien s'il se produit, sous l'influence du Soleil ou du vent, de légères déviations azimutales dans la réfraction, la somme des angles d'un triangle mesurés successivement ne sera plus 180° + excès sphérique. Le Calcul des probabilités nous montrera bientôt que la petite différence due à toutes les causes d'erreur doit aussi être également répartie, à titre de correction, entre les trois angles de chaque triangle. Ces précautions sont d'autant plus nécessaires que la mesure d'un angle par la méthode de la réitération ou de la répétition prend plus de temps.

Signaux lumineux; phares ou héliotropes.

Il est bien préférable de placer de petits phares portatifs (lampes à double courant d'air avec réflecteur parabolique) sur les piliers

Fig. 76.



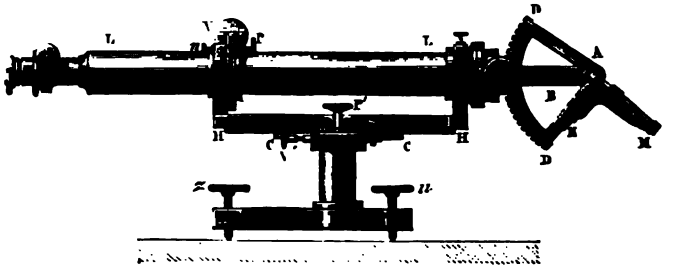
mêmes qu'on doit ériger en chaque station pour porter l'instrument. Seulement, ces signaux ne seraient visibles que pendant la

nuit, à moins d'employer la lumière électrique. Pendant le jour, on remplace la lampe par un petit miroir que l'on manœuvre de manière à envoyer la lumière du Soleil dans la direction de l'observateur.

1° *Signaux de nuit; phare du colonel Mangin* (*fig.* 75). — Il suffit de donner ici le dessin de cet ingénieux appareil dont la source lumineuse, une simple lampe à pétrole, peut être remplacée par la lumière bien plus intense que fournit l'électricité.

2° *Signaux de jour; héliotrope de Gauss.* — L'héliotrope de Gauss se compose d'une lunette montée sur un trépied, comme le théodolite, et munie, en avant de l'objectif, de deux miroirs assemblés à angle droit, qui ne recouvrent que la moitié de cet objectif.

Fig. 77.



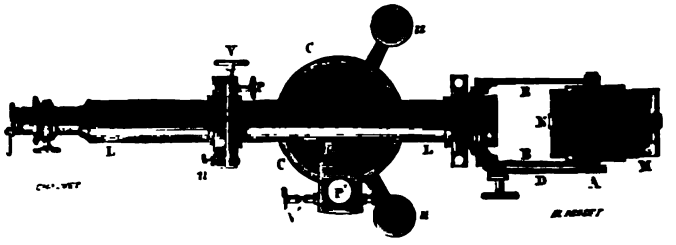
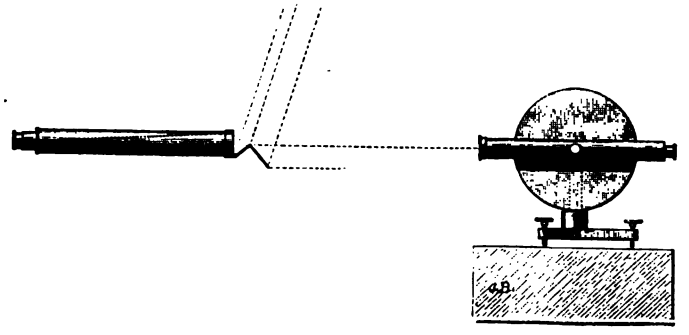


Fig. 78.

En faisant tourner ces miroirs jusqu'à ce que l'un d'eux envoie les rayons réfléchis du Soleil dans la lunette, où ils forment une image de cet astre, l'autre miroir enverra un faisceau de rayons solaires dans la direction diamétralement opposée, et, si la lunette de l'héliotrope est dirigée sur l'instrument de l'observateur, la lunette

de celui-ci recevra un faisceau de rayons très sensiblement parallèles, qui formeront au foyer une image semblable à celle d'une

Fig. 79.



étoile, sur laquelle il sera facile de pointer avec une grande précision.

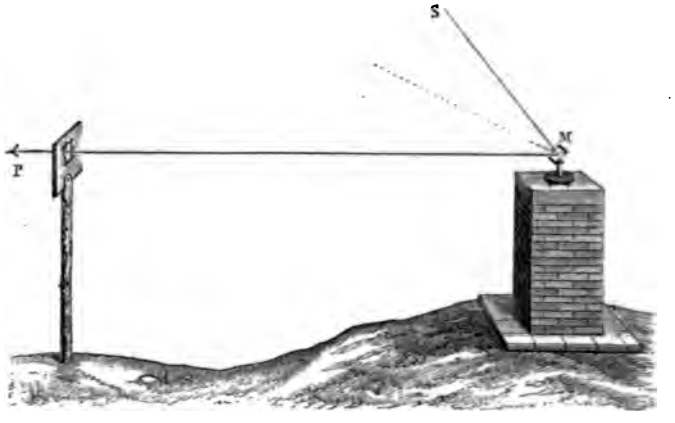
La théorie de cet instrument, qu'on utilise aujourd'hui à l'armée pour envoyer au loin des signaux télégraphiques, est bien simple. Pour que l'image perçue par l'observateur fût celle du Soleil tout entier, il faudrait que le miroir eût des dimensions telles que, vu de la station, il sous-tendît, comme le Soleil lui-même, un angle de $32'$. Soit d cette dimension, et $40\,000^{m}$ la distance de l'observateur, car telle est la plus grande longueur des côtés de nos triangles. On devra avoir $3438' \frac{d}{40\,000} = 32'$, d'où $d = 400^{m}$. Comme on ne lui donne pas même $0^{m},1$ de côté, l'image qu'il enverra à l'observateur n'aura pas $\frac{0,1}{400}$ ou $\frac{1}{4000}$ du diamètre du Soleil, ce qui répond à $\frac{32'}{4000} = \frac{1920''}{4000} = 0'',40$. L'image vue dans la lunette sera donc un point lumineux semblable à une étoile.

Ce genre de signaux serait parfaitement perceptible à une quarantaine de lieues, s'il était possible à l'observateur ou au porteur de l'héliotrope de se poster au sommet d'une cime assez élevée.

Cet instrument, actuellement en usage en France, a été singulièrement simplifié par le commandant Perrier. Il se réduit à un miroir monté sur deux axes rectangulaires, et posé sur le pilier de la station précédemment occupé par le théodolite, juste dans les mêmes repères, de manière à éviter toute réduction au centre de la

station. Un aide manœuvre ce miroir à la main et se guide, pour diriger le faisceau de lumière solaire qu'il doit envoyer au théodo-

Fig. 80.



lite de l'observateur, sur une planchette percée d'un trou circulaire dont le faisceau lumineux doit éclairer le pourtour.

Mesure des bases.

Jalonnement. — Sur un terrain bien plat, à proximité du réseau, on établit deux piliers destinés à fixer les extrémités d'une base de 10^{km} à 12^{km}. Pour la jalonner, on place vers le milieu de cette base, et dans sa direction, une lunette semblable à la lunette méridienne dont on rectifie avec le plus grand soin la ligne de visée, de manière à la rendre bien perpendiculaire à l'axe de rotation rendu lui-même parfaitement horizontal. Les piliers des extrémités ne doivent même être définitivement scellés qu'après qu'on se sera assuré que le fil vertical de la lunette, tournée alternativement vers leurs mires, les bissecte exactement. On fait ensuite planter des jalons en nombre convenable, de manière qu'ils se projettent tous sur le fil vertical de la lunette.

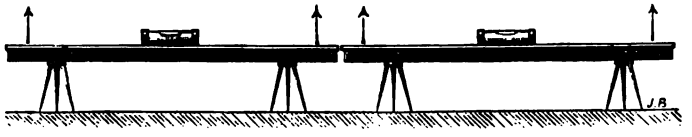
Règles et chevalets. — Dans l'alignement ainsi tracé, on place bout à bout trois règles de 4^{m} en platine, portées sur des traverses de bois et sur des chevalets. Elles sont nivelées avec soin. On

estime ensuite leur température par la différence de dilatation entre elles et une seconde règle de cuivre soudée à une de leurs extrémités. Enfin, on mesure, à l'aide de languettes mobiles à verrous munies de verniers, le petit intervalle laissé à dessein entre leurs bouts afin d'éviter les chocs.

Puis, laissant en place les deux dernières règles, on enlève la première qu'on reporte plus loin, bout à bout à la suite de la dernière, toujours en évitant le contact, et l'on opère sur cette seconde portée comme sur la précédente (*fig.* 81).

Lorsque le terrain n'est pas bien horizontal, on mesure l'inclinaison de chaque règle avec le niveau.

Fig. 81.



Pour une base de 12 000^{m}, il faut placer ainsi bout à bout 3000 portées. L'opération dure environ un mois. A la fin de chaque journée, on fixe sur le sol le point auquel on est arrivé, et pour cela on enfonce en terre un fort piquet vers le bout libre de la dernière règle. On marque un point sur la tête du piquet; on y laisse tomber un fil à plomb touchant en haut la languette de la règle. Le lendemain, pour recommencer, on replace le fil à plomb, et par suite la règle de la veille dans la même position.

Soient l_0 la longueur d'une de ces règles en platine, étalonnée avec soin à 0° du thermomètre sur la toise du Pérou, ancienne unité linéaire des géodésiens, ou aujourd'hui sur le mètre des Archives nationales, k son coefficient de dilatation, θ sa température, v le petit intervalle laissé à dessein entre deux règles consécutives et mesuré au moyen d'une languette à verrou munie d'un vernier, i son inclinaison sur l'horizontale; la longueur de la base sera, en désignant par n le nombre des portées,

$$B = nl_0 + \Sigma v + (l_0 + v)\Sigma k\theta - 2(l_0 + v)\Sigma \sin^2 \tfrac{1}{2} i.$$

Degré de précision de la mesure d'une base.

Désignons par ∂l_0 l'erreur probable de l'étalonnage, $d\theta$ l'erreur probable de la température de la règle sur le terrain, dv l'erreur probable de la mesure d'un intervalle laissé entre deux règles : le carré de l'erreur probable de la base B sera

$$\overline{n\partial l_0}^2 + \overline{Bk\partial\theta}^2 + \overline{\sqrt{n}\,\partial v}^2,$$

en supposant que les inclinaisons i aient été bien mesurées et que les portées aient été exactement placées sur l'alignement général.

Supposons $\partial l_0 = \pm 0^{mm},01$, $\partial\theta = \pm 1^\circ$, $\partial v = \frac{1}{20}$ de millimètre, on aura, avec $k = 0,000086$, $B = 12\,000^m$,

$$\partial B = \sqrt{\overline{30}^2 + \overline{103}^2 + 7,5} = 120^{mm} \text{ à peu près.}$$

Ainsi $\frac{\partial B}{B} = \frac{1}{100\,000}$, et c'est à un cent-millième près que les dimensions linéaires du réseau entier seront déterminées.

Les deux causes d'erreurs prépondérantes sont donc ici un étalonnage imparfait et l'évaluation si difficile de la température des règles sur le terrain. C'est sur ce second point que s'est portée principalement l'attention de Borda. Il a résolu le problème par l'invention des règles bimétalliques, cuivre et platine. Chaque règle se compose de deux règles superposées, de dilatation différente, fixées l'une à l'autre par une de leurs extrémités, et ayant toutes les deux la longueur l_0 pour $\theta = 0^\circ$. A l'aide d'un vernier tracé à l'autre extrémité, on mesure, à un instant quelconque, la différence d de leurs longueurs. En désignant par k' le coefficient de dilatation du cuivre, double à peu près de celui du platine, on aura

$$d = (k' - k)\theta,$$

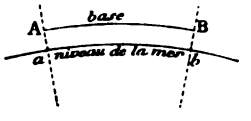
d'où l'on tirera θ, pour le même instant. Mais, même avec cette ingénieuse disposition qui a été adoptée par les géodésiens du monde entier, on n'obtiendrait rien de bon si l'on ne garantissait par un petit toit les règles métalliques contre les rayons du Soleil

ou la radiation vers le ciel. Pour obtenir une précision supérieure, celle d'un millionième par exemple, il faudrait être en état de déterminer la température des règles à $0^\circ,1$ près.

Réduction de la base au niveau de la mer.

Le terme $-2(l+v)\Sigma\sin^2\frac{1}{2}i$ réduit la base à l'horizon de l'une des extrémités. Elle donne dès lors la longueur d'un arc de cercle tracé sur la surface de niveau passant par ce dernier point. Il reste à la projeter sur la surface de niveau des mers, ce qui ramènera toute la triangulation à ce même niveau. Soient h l'altitude de la base AB, r le rayon terrestre; on aura

Fig. 82.



$$\frac{\text{arc}\,ab}{\text{arc}\,\text{AB}} = \frac{r}{r+h}, \quad \text{d'où} \quad \text{AB} - ab = \frac{h}{r}\,\text{AB}.$$

Pour $h = 400^m$, $\text{AB} = 12\,000^m$, $r = 6\,400\,000^m$, cette réduction serait de $0^m,80$.

L'altitude de la base est fournie, comme on le verra plus loin, par un nivellement géodésique poussé jusqu'à la mer la plus voisine.

Jonction de la base avec le réseau.

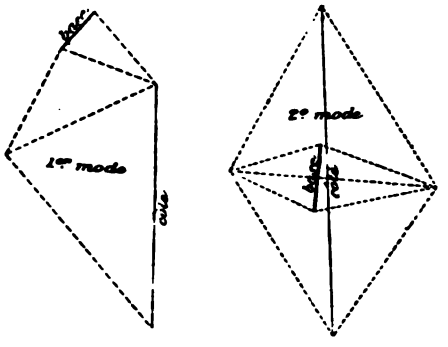
Si la base était dirigée perpendiculairement à l'un des côtés, vers son milieu, les triangles de jonction formeraient un losange dont la base et le côté seraient les diagonales. Avec un côté de 10 lieues et une base b de 3, l'angle B au sommet sera de 33°, angle assurément défavorable, et comme l'erreur probable du côté conclu a, en tant qu'elle dépend de celle de cet angle, est

$$b\,\frac{d\frac{1}{2}\text{B}}{\sin^2\frac{1}{2}\text{B}},$$

elle se réduira, en supposant $dB = 1''$, à $\frac{1}{3}$ de mètre, tandis qu'avec une base de $\frac{1}{2}$ lieue elle serait de 2^m.

On voit par là combien il importe de donner à la base la plus grande étendue possible. De quelque manière que la jonction soit faite, il faut toujours conclure du petit au grand, et, à ce compte,

Fig. 83.



en supposant même exactitude dans les opérations de la jonction, les bases de 2000^m mesurées en Allemagne et en Russie donneraient une précision six fois moindre.

Le plus souvent la base ne peut être mesurée dans l'emplacement le plus commode. On la relie alors au côté voisin par une triangulation plus compliquée dont les figures ci-jointes offrent deux modèles.

CHAPITRE XV.

CALCUL DES TRIANGLES GÉODÉSIQUES. — THÉOREME DE LEGENDRE. — COMPENSATION DES ERREURS.

Réseau géodésique français.

Pour donner une idée de la vaste triangulation qui couvre notre territoire, nous plaçons ici la Carte géodésique de France à très petite échelle. Ce réseau se compose de trois méridiennes, celle de l'Ouest, celle de Paris et celle de l'Est, coupées à angle droit par six chaînes de triangles dirigées suivant les parallèles d'Amiens, de Paris, de Bourges, de Lyon, de Rodez et de Perpignan. Ces grands quadrilatères ont été eux-mêmes remplis de triangles de premier ordre. Il sera question plus tard des triangulations dirigées le long des parallèles; actuellement nous nous bornons à appeler l'attention sur la grande chaîne qui s'étend de Dunkerque à Perpignan. Elle a été poussée plus loin, par Barcelone, jusqu'aux îles Formentera par Biot et Arago, et nos officiers d'état-major viennent de la prolonger encore, en commun avec les officiers espagnols, par-dessus la Méditerranée, jusqu'à notre triangulation de l'Algérie.

Désignons désormais par a, b, c les longueurs en mètres ou en toises des côtés du triangle géodésique ABC. Les arcs correspondants seront, en parties du rayon r de la sphère, $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$. Le premier ayant été mesuré directement, nous calculerons le second par

$$\sin\frac{b}{r} = \sin\frac{a}{r}\,\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Les arcs étant petits, il y aura avantage à remplacer leurs sinus

par leurs développements en fonction des arcs, ce qui donne

$$\frac{b}{r} - \frac{1}{6}\frac{b^3}{r^3} + \ldots = \left(\frac{a}{r} - \frac{1}{6}\frac{a^3}{r^3} + \ldots\right)\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Négligeons les cinquièmes puissances des petits arcs et écrivons

$$\frac{b}{r} = \frac{a}{r}\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{1}{6}\left(\frac{b^3}{r^3} - \frac{a^3}{r^3}\frac{\sin B}{\sin A}\right).$$

Il est permis, avec la même approximation, de remplacer $\frac{b^3}{r^3}$ par sa valeur approchée $\frac{a^3}{r^3}\frac{\sin^3 B}{\sin^3 A}$, et d'écrire, en remarquant que

$$\sin^2 B - \sin^2 A = \sin(B + A)\sin(B - A),$$

$$\frac{b}{r} = \frac{a}{r}\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{1}{6}\frac{a^3}{r^3}\frac{\sin(B + A)\sin(B - A)\sin B}{\sin^3 A} \quad (^1).$$

On peut donc calculer le triangle ABC comme s'il était plan, c'est-à-dire par la formule

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A},$$

à la condition d'ajouter à cette valeur un petit terme correctif dont la valeur ne saurait dépasser $0^m,25$. Pour l'évaluer, en effet, faisons $a = 40\,000^m$, $r = 6\,400\,000^m$; on aura

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{160},\ \frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{25600} \quad \text{et} \quad \frac{1}{6}\frac{a^3}{r^2} = \frac{1}{6}\frac{40000^m}{25600} = 0^m,26.$$

Legendre a remarqué qu'on pourrait se passer du terme correctif si, au lieu de calculer ce triangle comme plan avec des angles évidemment un peu trop forts, on retranchait tout d'abord de ces angles le tiers de l'excès sphérique pour les ramener à la condition des angles d'un triangle plan. Soit $\mathcal{E}$ l'excès sphérique du triangle ABC qu'on obtiendra immédiatement par

$$\mathcal{E} = A + B + C - 180^\circ.$$

---

(1) On chasse le dénominateur r, en sorte que le calcul ne porte plus sur les arcs exprimés en minutes et secondes, mais sur leur longueur en mètres.

CARTE DU RÉSEAU GÉODÉSIQUE

DE LA FRANCE.

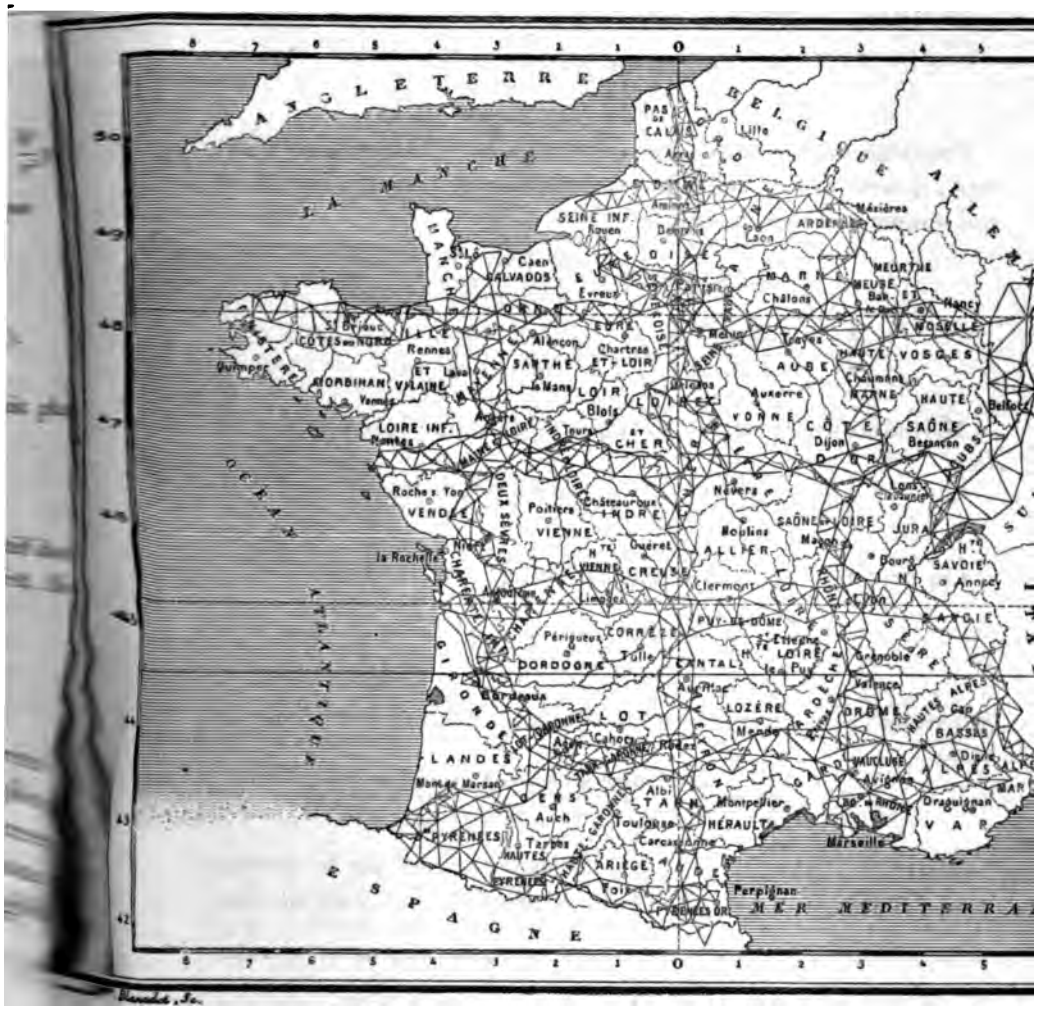


Fig. 84.

On a supprimé sur ce plan les triangles de premier ordre qui remplissent les quadrilatères.

On aura, en opérant comme le prescrit Legendre,

$$b = a\,\frac{\sin(B - \frac{1}{3}\mathcal{E})}{\sin(A - \frac{1}{3}\mathcal{E})}.$$

Développons ces sinus et divisons haut et bas par $\cos\frac{1}{3}\mathcal{E}$:

$$\frac{b}{r} = \frac{a}{r}\,\frac{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{3}\mathcal{E}\cot B}{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{3}\mathcal{E}\cot A}\,\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Pour effectuer cette division aux termes près du deuxième ordre en $\mathcal{E}$, il suffit de multiplier le numérateur par $1 + \operatorname{tang}\frac{1}{3}\mathcal{E}\cot A$, ce qui donne, en remarquant que

$$\cot A - \cot B = \frac{\sin(B - A)}{\sin B \sin A},$$

$$\frac{b}{r} = \frac{a}{r}\,\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{a}{r}\operatorname{tang}\frac{1}{3}\mathcal{E}\,\frac{\sin B}{\sin A}\,\frac{\sin(B - A)}{\sin B \sin A}.$$

Mais nous avons vu plus haut que l'excès sphérique $\mathcal{E}$ a pour valeur

$$\frac{T}{r^2} = \frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{r^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{r^2}\,\frac{\sin B \sin(B + A)}{\sin A}.$$

On peut donc remplacer plus haut $\operatorname{tang}\frac{1}{3}\mathcal{E}$ par

$$\frac{1}{6}\,\frac{a^2}{r^2}\,\frac{\sin B \sin(B + A)}{\sin A},$$

aux termes près du troisième ordre [1]. La relation précédente devient

$$\frac{b}{r} = \frac{a}{r}\,\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{1}{6}\,\frac{a^3}{r^3}\,\frac{\sin B \sin(B + A)\sin(B - A)}{\sin^2 A},$$

c'est-à-dire justement ce que nous avons trouvé par le premier procédé. Donc, au lieu d'employer ce procédé, on a la même exac-

---

[1] Comme dans cette substitution $\operatorname{tang}\frac{1}{3}\mathcal{E}$ est multiplié par $\frac{a}{r}$, le terme du second ordre en $\mathcal{E}^2$, que nous venons de négliger, aurait lui-même $\frac{a}{r}$ pour facteur : et comme $\mathcal{E}^2$ est de l'ordre $\frac{a^4}{r^4}$, l'erreur serait encore de l'ordre $\frac{a^5}{r^5}$.

titude en traitant les triangles géodésiques comme des triangles plans, après avoir retranché de leurs angles le tiers de l'excès sphérique. Les termes que l'on néglige ainsi dans l'un et l'autre cas ont pour facteur $\frac{1}{120}\frac{a^2}{r^2}$, c'est-à-dire $\frac{1^m}{2\,000\,000}$ lorsque a est de $40\,000^m$.

Finalement, pour résoudre le triangle sphérique dont on connaît le côté a en mètres et les angles dièdres A, B, C, on calculera ε par

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ,$$

puis on obtiendra b et c par les formules

$$b = a\frac{\sin B'}{\sin A'}, \quad c = a\frac{\sin C'}{\sin A'},$$

dont les angles sont donnés par

$$A' = A - \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$
$$B' = B - \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$
$$C' = C - \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

On obtiendra ainsi $\frac{b}{r}$ et $\frac{c}{r}$ aux termes près de l'ordre $\frac{a^3}{r^4}$.

On calcule ainsi de proche en proche, en partant de la base, tous les triangles d'un réseau. Pour vérification, on mesure, à l'autre extrémité du réseau, une seconde base dont la valeur, calculée par la chaîne des triangles, doit s'accorder, à une petite fraction près du mètre, avec la valeur obtenue directement. C'est ainsi que la triangulation de la France s'appuie sur sept bases qui ont été mesurées :

1° A Melun, par Delambre et Méchain;
2° A Perpignan, id.
3° A Ensisheim, par le colonel Henry;
4° A Brest, par le colonel Bonne;
5° A Aix, en Provence, par le colonel Delcros;
6° A Bordeaux, par le colonel Brousseaud;
7° A Dax, par le colonel Corabœuf.

La grande méridienne russe de 25° d'amplitude a treize bases; mais celles-ci sont bien plus petites que les nôtres.

Compensation des angles d'un triangle.

Si l'on ne mesurait sur le terrain que les éléments nécessaires au calcul d'une triangulation, il ne serait pas question de corriger ces éléments : on les introduirait dans les formules tels que l'observation nous les donne. Mais, à titre de vérification, on fait le plus souvent des observations superflues; par exemple, on mesure le troisième angle de chaque triangle et, au bout d'une chaîne de triangles, on mesure une seconde base. De là des relations nouvelles entre les éléments nécessaires et les éléments superflus, relations qui doivent être rigoureusement satisfaites. Évidemment elles ne le pourront que si l'on fait subir aux mesures de petites corrections. Nous allons les déterminer par la condition que la somme de leurs carrés soit un minimum.

Partons du cas le plus simple. On a mesuré les trois angles A, B, C d'un triangle plan et obtenu les résultats α, β, γ, en sorte que les équations de la question sont

$$\left.\begin{array}{l} A = \alpha \\ B = \beta \\ C = \gamma \end{array}\right\} \text{équations susceptibles de petits résidus,}$$

$$A + B + C = 180^\circ, \quad \text{équation qui doit être satisfaite rigoureusement.}$$

Si l'on se reporte à la théorie des erreurs (p. 195), on verra qu'il n'est possible d'appliquer directement la méthode des moindres carrés qu'à des inconnues indépendantes les unes des autres. Ici la quatrième équation établit entre elles une dépendance rigoureuse. Il faut donc éliminer, à l'aide de cette équation, une des inconnues, A par exemple, ce qui réduit le système de ces équations à

$$B = \beta,$$
$$C = \gamma,$$
$$B + C = 180 - \alpha.$$

Traitons-les par la méthode des moindres carrés ; nous aurons les équations finales en écrivant

$$2B + C = \beta + 180 - \alpha,$$
$$B + 2C = \gamma + 180 - \alpha.$$

On en tire

$$3\,C = 2\,\gamma + 180 - \alpha - \beta = 3\,\gamma + 180 - (\alpha + \beta + \gamma),$$
$$C = \gamma - \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ),$$

de même

$$B = \beta - \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ).$$

En portant les deux valeurs dans la quatrième équation ci-dessus, on trouve

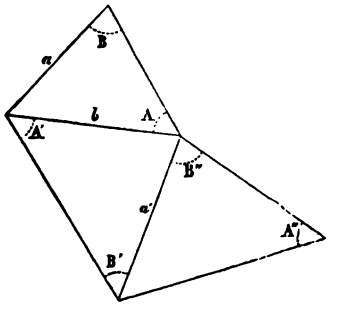
$$A = \alpha - \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ).$$

Ainsi, lorsque la somme des trois angles d'un triangle plan mesurés avec le même soin ne fait pas juste 180°, la correction la plus probable consiste à répartir par tiers la différence entre les trois angles. S'il s'agissait d'un triangle sphérique, il suffirait de remplacer dans les formules précédentes la somme 180° des trois angles par $180^\circ + \mathcal{E}$.

Compensation d'un réseau de triangles.

S'il n'y avait pas d'autre mesure superflue dans le cours de la triangulation, on se contenterait de corriger ainsi les angles de chaque triangle pris à part. Mais si nous supposons une seconde

Fig. 85.



base, il en résulte, entre les angles et les côtés, une relation que l'on obtient en multipliant membre à membre, d'un bout à l'autre de la chaine, les analogies

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}\,\frac{b}{a'}\,\frac{\sin B'}{\sin A'}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{\sin A''}{\sin B''}, \quad \ldots.$$

Pour fixer les idées, supposons trois triangles intermédiaires seulement, et représentons par a et b' deux côtés mesurés directement, c'est-à-dire les deux bases que nous considérerons comme rigoureusement exactes. La relation nécessaire sera

$$\frac{a}{b'} = \frac{\sin A \sin B' \sin A''}{\sin B \sin A' \sin B''}.$$

D'autre part, on a mesuré les trois angles de chaque triangle. Voici donc l'ensemble des relations fournies par ces mesures :

$$\left.\begin{array}{lll} A = \alpha, & A' = \alpha', & A'' = \alpha'' \\ B = \beta, & B' = \beta', & B'' = \beta'' \\ C = \gamma, & C' = \gamma', & C'' = \gamma'' \end{array}\right\} \text{équations susceptibles de résidus,}$$

$$\left.\begin{array}{l} A + B + C = 180 + \mathcal{E} \\ A' + B' + C' = 180 + \mathcal{E}' \\ A'' + B'' + C'' = 180 + \mathcal{E}'' \\ \dfrac{a}{b'} = \dfrac{\sin A \sin B' \sin A''}{\sin B \sin A' \sin B''} \end{array}\right\} \text{équations qui doivent être rigoureusement satisfaites.}$$

Les neuf inconnues étant reliées par quatre équations de rigueur, il faudra, avec l'aide de celles-ci, éliminer quatre d'entre elles, ce qui réduira le nombre total des équations de treize à neuf, et le nombre des inconnues de neuf à cinq.

Alors nous serons en droit d'appliquer la méthode de Legendre, car les inconnues conservées sont indépendantes les unes des autres.

On remarquera que l'une des équations de rigueur n'est pas linéaire. Pour lui donner cette forme, nous suivrons la marche indiquée page 196, c'est-à-dire, considérant α, β, γ, α', β', ..., fournies par l'observation, comme des valeurs très approchées de A, B, C.... nous désignerons par $x, y, z, x', y', \ldots$ les très petites corrections qu'il faut leur ajouter, de sorte que

$$\begin{array}{lll} A = \alpha + x, & A' = \alpha' + x', & \ldots\ldots, \\ B = \beta + y, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{array}$$

Avant de porter ces expressions dans les treize précédentes, remarquons que la dernière peut être écrite de la manière

suivante :

$$\mathcal{L}\frac{a}{b'}\frac{\sin B \sin A' \sin B''}{\sin A \sin B' \sin A''} = 0.$$

En remplaçant B par $\beta + y$, A′ par $\alpha' + x'$, ..., on développera les logarithmes en négligeant les puissances supérieures des petites corrections y, x', ..., ce qui ramène cette équation à la forme linéaire. Posons

$$206\,265'' \mathcal{L}\frac{a}{b'}\frac{\sin\beta \sin\alpha' \sin\beta''}{\sin\alpha \sin\beta' \sin\beta''} \text{ par } k,$$

puis

$$\begin{aligned} &180 + \mathcal{E} - \alpha - \beta - \gamma \text{ par } n,\\ &180 + \mathcal{E}' - \alpha' - \beta' - \gamma' \text{ par } n',\\ &180 + \mathcal{E}'' - \alpha'' - \beta'' - \gamma'' \text{ par } n'', \end{aligned}$$

on aura les treize équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x = 0, & x' = 0, & x'' = 0,\\ y = 0, & y' = 0, & y'' = 0,\\ z = 0, & z' = 0, & z'' = 0, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} x + y + z + n = 0,\\ x' + y' + z' + n' = 0,\\ x'' + y'' + z'' + n'' = 0, \end{cases}$$

$$(3)\quad y\cot\beta + x'\cot\alpha' + y''\cot\beta'' - x\cot\alpha - y'\cot\beta' - x''\cot\alpha'' + k = 0\ (^1).$$

Des quatre équations rigoureuses (2) et (3) tirons les valeurs de quatre des inconnues, y, z, z', z'' par exemple, en fonction des cinq autres. Voici ces valeurs :

$$(4)\qquad \begin{cases} y = -\dfrac{x'\cot\alpha'}{\cot\beta} - \dfrac{y''\cot\beta''}{\cot\beta}\\ \qquad + \dfrac{x\cot\alpha}{\cot\beta} + \dfrac{y'\cot\beta'}{\cot\beta} + \dfrac{x''\cot\alpha''}{\cot\beta} - \dfrac{k}{\cot\beta},\\ z = -n - x + \dfrac{x'\cot\alpha'}{\cot\beta} + \dfrac{y''\cot\beta''}{\cot\beta}\\ \qquad - \dfrac{x\cot\alpha}{\cot\beta} - \dfrac{y'\cot\beta'}{\cot\beta} - \dfrac{x''\cot\alpha''}{\cot\beta} + \dfrac{k}{\cot\beta},\\ z' = -n' - x' - y',\\ z'' = -n'' - x'' - y''. \end{cases}$$

(1) Cette équation résulte de la différentiation de la relation logarithmique pré-

En portant ces valeurs dans les équations (1), nous formerons les neuf équations suivantes entre les cinq autres inconnues, qu'on pourra désormais considérer comme indépendantes :

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
x &= 0,\\
x' &= 0,\\
x'' &= 0,\\
-\frac{x'\cot\alpha'}{\cot\beta} - \frac{y''\cot\beta''}{\cot\beta} + \frac{x\cot\alpha}{\cot\beta}&\\
+\frac{y'\cot\beta'}{\cot\beta} + \frac{x''\cot\alpha''}{\cot\beta} - \frac{k}{\cot\beta} &= 0,\\
n - x + \frac{x'\cot\alpha'}{\cot\beta} + \frac{y''\cot\beta''}{\cot\beta} - \frac{x\cot\alpha}{\cot\beta}&\\
-\frac{y'\cot\beta'}{\cot\beta} - \frac{x''\cot\alpha''}{\cot\beta} + \frac{k}{\cot\beta} &= 0,\\
n' - x' - y' &= 0,\\
n'' - x'' - y'' &= 0,\\
y' &= 0,\\
y'' &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

De ces équations, traitées par la méthode de Legendre, on déduira les valeurs les plus probables de x, x', x'', y', y'', et, en portant celles-ci dans les équations (4), on obtiendra les valeurs les plus probables de y, z, z', z''. Ces neuf valeurs satisferont à toutes les conditions de rigueur, telles que celle de reproduire identiquement les bases, de quelque manière qu'on conduise le calcul pour aller de l'une à l'autre.

L'exemple simple que nous venons de donner trace la marche à suivre dans des cas plus complexes.

Les géodésiens s'attachent à multiplier les moyens de vérification. Non contents de mesurer les trois angles de chaque triangle, ils achèvent en chaque station le tour de l'horizon. Au point A, par exemple, après avoir mesuré A, C', B'', ils mesurent encore l'angle

---

cédente par rapport aux angles, non par rapport aux bases a et b', que nous supposons exactement mesurées et non susceptibles de correction.

extérieur Δ, de manière à avoir l'équation rigoureuse

$$A + C' + B'' + \Delta = 360^\circ,$$

à laquelle leurs mesures devront satisfaire. De plus, ils s'imposent la règle d'observer dans certaines stations des directions superflues, par exemple, en A la direction AD, en C la direction EC, etc. Chaque observation superflue introduit ainsi une équation nouvelle entre les angles seulement, ou entre les angles et les côtés. Véritablement, en multipliant ainsi ces équations de rigueur, on augmente la probabilité des corrections obtenues par les méthodes dont la Géodésie est principalement redevable à Gauss et à Bessel, mais le calcul se complique bien vite et devient impraticable dès qu'on veut l'étendre à un réseau géodésique un peu grand (¹). A notre avis, il vaut mieux, en général, employer son temps et ses ressources à perfectionner sur le terrain les mesures nécessaires qu'à recueillir des mesures superflues dont on est ensuite incapable de tirer parti dans le cabinet.

Observations astronomiques pour déterminer la direction et l'amplitude de la méridienne.

Azimut du premier côté et colatitude du sommet. — On place en A un cercle méridien portatif, pour y déterminer la colatitude λ et la direction A_m du méridien, en érigeant en m une mire temporaire. Remplaçant ensuite le cercle méridien par un théodolite, on mesurera l'azimut $mAB = A_1$ du côté AB. Par suite, la direction ARST... XYZ de la méridienne à travers la chaîne des triangles se trouvera déterminée.

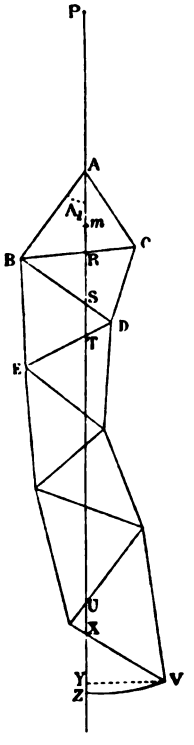
(¹) On en est réduit alors à décomposer le réseau en groupes séparés et à y opérer des compensations partielles d'après les règles précédentes; mais ce procédé laisse évidemment une place assez large à l'arbitraire, et ne répond pas à l'idéal de la théorie, qui serait de déterminer les corrections par l'ensemble de toutes les équations de condition.

Calcul de la méridienne par segments.

Dans le triangle sphérique ABR, on connaît le côté AB $= c$ et les angles dièdres A_1 et B. La formule

$$\varepsilon = 206\,265'' \frac{T}{r^2},$$

Fig. 86.



pour laquelle T peut être calculé par la formule connue des triangles plans

$$T = \tfrac{1}{2} c^2 \frac{\sin A_1 \sin B}{\sin(A_1 + B)},$$

fera connaître l'excès sphérique de ce triangle. On ramènera donc la résolution de ce triangle sphérique à celle d'un triangle plan en

retranchant $\frac{1}{3}\mathcal{E}$ de ses angles, et l'on aura

$$R - \tfrac{1}{3}\mathcal{E} = 180^\circ - (A_1 - \tfrac{1}{3}\mathcal{E} + B - \tfrac{1}{3}\mathcal{E}),$$

$$AR = c\,\frac{\sin(B - \frac{1}{3}\mathcal{E})}{\sin(R - \frac{1}{3}\mathcal{E})}, \quad RB = c\,\frac{\sin(A_1 - \frac{1}{3}\mathcal{E})}{\sin(R - \frac{1}{3}\mathcal{E})}.$$

Dans le triangle suivant BRS, on connaît BR et les angles en B et R, ce dernier étant le supplément de l'angle R obtenu précédemment. On en déduira donc le second segment RS. Le troisième triangle SDT donnera le troisième segment ST. On arrivera ainsi au dernier segment UX.

Le point X n'étant pas déterminé sur le terrain, on ne saurait y observer la colatitude. C'est en V que λ' aura dû être mesuré. Soit VZ l'arc de parallèle passant par V et décrit (sur la sphère) du pôle P comme centre. Il reste à calculer ce dernier tronçon XZ.

Pour cela, menons l'arc de grand cercle VY perpendiculairement à la méridienne. Le triangle XVY se calculera comme les précédents, et fera connaître en mètres les côtés XY et VY. Réduisons ce dernier en arc, en divisant sa valeur en mètres par le rayon r de la Terre. Le long triangle sphérique PVY nous donnera

$$\frac{\sin P}{\sin VY} = \frac{1}{\sin PV} = \frac{1}{\sin \lambda'},$$

puis on aura

$$\operatorname{tang} PY = \cos P \operatorname{tang} PV,$$

d'où

$$PV - PY = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} P \sin 2\lambda' - \ldots$$

Cet arc transformé en mètres donne YZ.

Ainsi, l'arc de méridien compris entre les parallèles de λ et λ' de colatitude sera, en mètres,

$$AR + RS + ST + \ldots + XY + YZ.$$

Enfin si l'on mesure en V l'azimut du dernier côté VX, cet azimut devra s'accorder avec celui qu'on déduira de l'angle en X du triangle VXY, et servira ainsi de vérification.

CHAPITRE XVI.

SUR LA COURBURE DES SURFACES CONVEXES.

La Terre n'étant pas une sphère parfaite, les verticales, c'est-à-dire les perpendiculaires à la surface des eaux tranquilles ne concourent plus au centre, et même les verticales des trois sommets d'un triangle géodésique ne se rencontrent pas en général; elles passent seulement, vers le centre de courbure moyenne de la région considérée, dans un anneau excessivement étroit. Il nous faut donc étudier les petites modifications que la forme propre au globe terrestre, d'ailleurs si peu différente d'une sphère, doit introduire, sinon dans les opérations précédentes, du moins dans les calculs qui s'y appliquent. Pour cela nous allons exposer aussi simplement que possible quelques notions indispensables sur la courbure des surfaces convexes et sur les lignes qu'on y peut tracer d'après une définition géométrique; telle est la ligne ARST... de la *fig.* 86.

Indicatrice; rayons de courbure principaux.

Supposons qu'une surface rapportée à trois axes rectangulaires soit représentée par l'équation $z = f(x, y)$ et qu'on puisse appliquer la série de Maclaurin au développement de cette équation: on aura, en désignant par l'indice o les valeurs que prennent les coefficients du développement général quand on y fait $x = 0$, $y = 0$,

$$z = f(x, y)_0 + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{df}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2}$$
$$+ \left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right)_0 xy + \left(\frac{d^2 f}{dy^2}\right)_2 \frac{y^2}{2} + \left(\frac{d^3 f}{dx^3}\right)_0 \frac{x^3}{2.3} + \ldots.$$

Si la surface passe par l'origine, tangentiellement au plan des xy, et qu'on choisisse la direction de l'axe des x de manière à faire disparaître le terme en xy, l'équation se réduira à

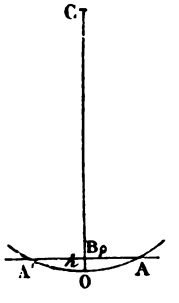
$$z = \left(\frac{d^2f}{dx}\right)_0 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \ldots.$$

Coupons la surface par un plan parallèle à celui des xy et situé à la hauteur h (infiniment petit du deuxième ordre); la section aura pour équation, en négligeant les termes d'ordre supérieur,

$$2h = \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_0 y^2.$$

Ce sera donc une ellipse si la surface est convexe, car alors les coefficients de x^2 et de y^2 seront positifs. Cette ellipse infiniment petite a reçu de M. Ch. Dupin le nom d'*indicatrice;* l'étude de ses caractères géométriques indique et détermine ceux de la surface elle-même autour du point considéré.

Fig. 87.



Menons par l'axe des z, c'est-à-dire par la normale à la surface en O, un plan quelconque qui coupe la surface suivant la courbe A'OA et le plan de l'indicatrice suivant le diamètre $A'A = 2\rho$. Soit $OC = 2r$ le diamètre du cercle osculateur en O, c'est-à-dire du cercle qui passe par les trois points infiniment voisins A', O, A. Il est évident que

$$\overline{BA}^2 = (2r - h)h,$$

ou, en négligeant h^2, qui est du quatrième ordre de petitesse,

$$\rho^2 = 2rh.$$

Ainsi le rayon de courbure d'une section normale quelconque est représenté par le carré du rayon correspondant de l'indicatrice. Désignons par a et b les deux axes de celle-ci, en sorte qu'on ait

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Les deux sections normales passant par les axes, et ayant pour rayons de courbure R et R′, donneront lieu aux relations

$$(1) \qquad b^2 = 2R'h, \quad a^2 = 2Rh,$$

et l'on voit immédiatement qu'à ces deux sections, dont les plans sont rectangulaires, répondent les rayons de courbure maximum et minimum.

Si, pour orienter toute autre section normale, nous désignons par φ l'angle que sa trace fait avec le demi-axe b, nous aurons

$$x = \rho \sin\varphi, \quad y = \rho \cos\varphi,$$

par suite

$$\frac{\rho^2}{b^2}\cos^2\varphi + \frac{\rho^2}{a^2}\sin^2\varphi = 1,$$

ou bien

$$\frac{1}{R'}\cos^2\varphi + \frac{1}{R}\sin^2\varphi = \frac{1}{r},$$

relation qui donne le rayon de courbure r d'une section normale dans un azimut φ, quand on connaît les rayons de courbure principaux R et R′.

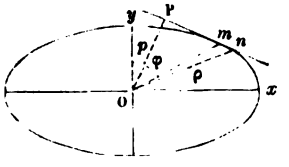
Courbure moyenne.

De même qu'on se représente la courbure d'une ligne en considérant le triangle infiniment aplati A′OA formé par deux éléments consécutifs OA, OA′, la corde AA′ $= 2\rho$ et la flèche OB $= h$. de même on peut se représenter la courbure d'une surface autour du point O en considérant le cône infiniment aplati que forment les éléments rectilignes, tels que OA, OA′, de toutes les sections qui passent par la normale en O. C'est un cône droit ayant pour base l'indicatrice ; ses plans principaux répondent aux axes de cette courbe.

Nous aurons à examiner jusqu'à quel point il est permis de substituer un élément de sphère à un élément du sphéroïde terrestre. Pour cela considérons d'une manière générale à quelle condition doit satisfaire une surface supposée flexible, mais inextensible, pour s'appliquer sur une autre, et quelles sont les lignes tracées sur la première surface qui ne changent pas de caractère en s'appliquant sur la seconde. Il est évident qu'un cône ne peut s'appliquer ainsi, exactement, sur un autre cône que si les angles au sommet de leurs développements sont égaux, c'est-à-dire si la déchirure qu'ils subissent en s'appliquant sur un plan est la même. Nous allons montrer que cet angle de déchirure, pour un élément quelconque de surface, est inversement proportionnel à l'aire de l'indicatrice.

L'aire du triangle élémentaire Omn est $\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$. C'est la projection, sur le plan de l'indicatrice, de l'aire d'un triangle élémentaire du cône $\frac{1}{2}\rho'^2 d\varphi'$. Désignons par p la perpendiculaire abaissée du

Fig. 88.



centre sur la tangente Pmn, par i l'angle que la génératrice ρ' du cône projetée en O$m = \rho$ fait avec le plan de la base, par i' l'inclinaison analogue de la droite qui joint le sommet du cône au point P; l'angle i' sera l'inclinaison de l'élément plan du cône. Par conséquent

$$\rho' = \frac{\rho}{\cos i} \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{\rho^2}{\cos^2 i}\cos i' d\varphi';$$

en d'autres termes,

$$d\varphi' = d\varphi\,\frac{\cos^2 i}{\cos i'}.$$

Mais on a

$$\operatorname{tang} i = \frac{h}{\rho}, \quad \operatorname{tang} i' = \frac{h}{p};$$

l'équation différentielle précédente devient donc, en considérant

que i et i' sont des angles infiniment petits,

$$d\varphi' = d\varphi \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{\rho^2} + \ldots\right)^2}{1 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{p^2} + \ldots},$$

ou bien, en négligeant les termes $\frac{h^4}{\rho^4}$ ou $\frac{h^4}{p^4}$,

$$d\varphi' = d\varphi\left[1 - \left(\frac{h^2}{\rho^2} - \frac{h^2}{2p^2}\right)\right].$$

Nous verrons un peu plus loin (p. 288 et 289) que

$$a^2 b^2 \frac{1}{\rho^2} = b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi,$$

$$a^2 b^2 \frac{1}{p^2} = \frac{b^4 \sin^2\varphi + a^4 \cos^2\varphi}{b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation différentielle précédente et intégrons de 0 à 2π, nous aurons

$$\text{somme des angles au sommet} = 2\pi - \frac{\pi h^2}{a^2 b^2}[a^2 + b^2 + (a^2 + ab + b^2)].$$

La déchirure du cône infiniment aplati a donc pour valeur $\frac{\pi h^2}{ab}$. Ainsi, pour qu'un élément de surface s'applique exactement sur un autre, il faut que leurs indicatrices, de même flèche, aient même aire.

Si l'on déforme d'une manière quelconque une surface flexible, chaque élément de la nouvelle surface sera applicable sur l'élément correspondant de la première; par conséquent, l'aire de chaque indicatrice reste invariable dans ce changement de forme.

L'aire πab est, en vertu des relations (1), p. 280, proportionnelle à $\sqrt{RR'}$. Par suite, le produit des rayons de courbure principaux reste invariable quand on déforme une surface pour l'appliquer sur une autre sans déchirure ni duplicature. Si cette autre est une sphère, il faut donc que son rayon soit égal à $\sqrt{RR'}$.

Dans ce développement d'une surface sur une autre, il est évident que les courbes tracées sur la première changent de figure; mais ni leurs longueurs, ni les angles qu'elles forment, ni les sur-

faces qu'elles comprennent ne sont altérés. Une courbe jouissant de la propriété d'être la plus courte entre deux de ses points reste la ligne la plus courte sur l'autre surface. Supposons qu'on ait, sur le sphéroïde terrestre, un très petit triangle curviligne dont les côtés jouiraient de cette propriété; si R et R′ sont les rayons principaux de la surface en cette région, on pourra l'appliquer sur une sphère de rayon $\sqrt{RR'}$; les côtés deviendront sur la sphère des arcs de cercle, car ce sont là les lignes les plus courtes qu'on puisse y tracer; les angles du triangle sphérique seront égaux à ceux du triangle sphéroïdal; les surfaces de ces deux triangles seront les mêmes.

La moyenne de tous les ρ^2 de l'indicatrice peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\varphi.$$

Cette moyenne est ab ou $\sqrt{RR'}$; il en sera de même de la moyenne de tous les rayons de courbure de la surface, puisque ceux-ci sont proportionnels aux ρ^2. $\sqrt{RR'}$ représente donc, en ce sens, le rayon de courbure moyen d'une surface en un point où R et R′ sont les rayons de courbure principaux.

Lignes de courbure.

Ainsi, en chaque point d'une surface, on rencontre deux sections normales se croisant à angles droits et ayant, l'une le plus grand, l'autre le plus petit rayon de courbure. La continuité exige qu'en passant d'un élément à l'autre, dans un sens quelconque, la courbure varie par degrés insensibles. On comprend donc qu'on puisse tracer sur une surface une ligne continue qui serait en chaque point tangente à la section principale de courbure maximum en ce point, et que, si l'on construisait une seconde ligne tangente partout aux sections principales de courbure minimum, cette seconde ligne couperait la première à angle droit. Il y a ainsi sur chaque surface une infinité de lignes de courbure de première espèce, croisant à angle droit une infinité de lignes de courbure de deuxième. Elles sont telles qu'aux points consécutifs de chacune de

ces courbes les normales à la surface se rencontrent deux à deux, et forment ainsi une surface développable. Si l'on se reporte à l'élément conique déjà considéré, il est facile de voir que les plans diamétraux n'y sont pas normaux, en général, à la surface du cône; seuls les deux plans principaux jouissent de cette propriété; par conséquent, les seules normales infiniment voisines qui rencontrent l'axe sont celles qui se trouvent dans les plans principaux.

Les lignes de courbure ainsi définies s'obtiennent immédiatement sur les surfaces de révolution. Ce sont les méridiens et les parallèles de la surface. On voit, en effet, que les éléments superficiels situés sur un même parallèle ont les axes de leurs indicatrices tangents à ce cercle dont le centre est sur l'axe, et que les normales menées en différents points de ce parallèle se rencontrent bien deux à deux, puisqu'elles se rencontrent toutes et forment un cône de révolution autour de l'axe. Par conséquent aussi, les lignes de la seconde courbure, lesquelles doivent croiser les premières à angle droit, ne peuvent être que des méridiens; les unes et les autres sont des courbes planes. La Terre étant, comme nous le verrons plus loin, un ellipsoïde de révolution, on décrira à sa surface une ligne de courbure en marchant, soit sur un même parallèle, soit sur un même méridien. Dans le premier cas, la colatitude λ reste la même; dans le second cas, la longitude L est constante.

Lignes géodésiques.

Supposons qu'on marche sur le globe terrestre par la méthode des alignements, comme nous l'avons fait tacitement pour tracer la ligne ARS...X de la *fig.* 86 à travers nos triangles géodésiques. Cela revient à tracer sur le sol un premier élément AR dans une direction donnée. Arrivé en R, on détermine l'élément suivant RS par la condition que RS soit dans le plan déterminé par l'élément AR et la verticale en R. Arrivé en S, on détermine l'élément suivant ST, de manière qu'il se trouve dans le plan vertical mené en S dans la direction SR, et ainsi de suite. La ligne ARS... ainsi tracée jouit évidemment de la propriété d'avoir deux éléments consécutifs dans un même plan vertical, c'est-à-dire normal à la surface de la Terre; par conséquent les plans osculateurs de cette courbe sont normaux à la surface. Il en résulte que cette courbe

jouit de la propriété d'être la plus courte qu'on puisse tracer sur la surface entre deux quelconques de ses points. En effet, si vous faites rouler tangentiellement un plan sur la surface le long de la courbe ARS..., l'enveloppe de ses positions successives sera une surface développable dont les génératrices se trouveront perpendiculaires aux plans verticaux déterminés par deux éléments consécutifs de la courbe. Si l'on développe cette surface sur un plan, la transformée de la courbe directrice sera une ligne droite. Elle sera donc plus courte que toute courbe voisine dans la zone de contact des deux surfaces.

Ces courbes d'alignement se nomment *courbes géodésiques;* on obtiendra mécaniquement celle qui unit deux points quelconques en tendant un fil sur la surface entre ces deux points.

Si l'on se reporte au cône infiniment petit du second degré qui représente un élément superficiel autour d'un point quelconque, on verra que les courbes géodésiques qui passent par ce point répondent aux arêtes opposées de ce cône, celles qui se trouvent dans ses plans diamétraux. Il est évident que les normales à la surface, menées par les points successifs d'une pareille courbe, ne se rencontrent généralement pas deux à deux, comme cela a lieu pour les lignes de courbure. Ainsi, dans la *fig.* 88, la normale à la surface, à l'extrémité de l'élément projeté en O*m* ne rencontre pas la normale en O; elle en dévie d'un petit angle facile à déterminer.

Cependant, si la surface est de révolution, une ligne géodésique ou d'alignement, dont le premier élément serait aligné dans le sens du méridien (c'est justement le cas des *fig.* 56 et 86), se confondra avec la ligne de courbure de même direction, c'est-à-dire avec le méridien lui-même. C'est pourquoi le procédé d'alignement des segments AR, RS, ST,..., qui a été employé plus haut pour tracer un méridien sur une sphère, à travers une série de triangles, est encore applicable à l'ellipsoïde de révolution. Cela nous donne même le moyen de soumettre l'hypothèse de cette dernière forme à un contrôle délicat. En effet, si la Terre est réellement une surface de révolution, en déterminant par l'observation l'azimut du dernier élément en X, on devra trouver zéro. Dans le cas où l'azimut calculé différerait notablement de la direction observée, il faudrait en conclure que, dans cette région, la surface mathématique de la Terre n'est pas de révolution.

Les côtés A, B, C d'un triangle géodésique n'ayant guère plus de 20′ d'amplitude, ils peuvent être considérés comme des arcs de courbes géodésiques tracées entre les trois sommets. Quand on remplace la surface de l'ellipsoïde terrestre par la sphère de même courbure moyenne, ces lignes géodésiques restent géodésiques sur cette sphère, et y deviennent par conséquent des arcs de cercle de même longueur se coupant sous les mêmes angles. Nous n'avons donc rien à changer à nos opérations sur le terrain ; elles sont censées être faites sur la sphère localement équivalente, et le triangle ABC répond à un véritable trièdre ayant son sommet au centre de cette sphère.

CHAPITRE XVII.

FORMULES ET DONNÉES NUMÉRIQUES APPLICABLES A L'ELLIPSOIDE TERRESTRE.

Rayons de courbure principaux.

L'équation d'une ellipse rapportée à ses axes étant

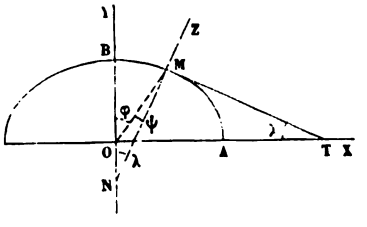
$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

nous la mettrons sous la forme suivante

$$y^2 + (1 - e^2) x^2 = a^2 (1 - e^2).$$

En un point M quelconque de la Terre, la coordonnée courante pour un observateur placé à la surface du globe est la colatitude,

Fig. 89.



c'est-à-dire l'angle λ de la verticale MZ avec l'axe de rotation OB. Or MZ est normale en M à la surface de l'ellipsoïde terrestre, et par conséquent à l'ellipse génératrice BMA. On aura donc

$$(1) \qquad \operatorname{tang} \lambda = -\frac{dy}{dx} = (1 - e^2) \frac{x}{y}.$$

Si nous désignons la *grande normale* MN par N, ce qui donne

$$(2) \qquad x = N \sin \lambda,$$

nous aurons, en vertu de l'expression de tang λ,

$$y = N (1 - e^2) \cos \lambda.$$

En portant ces deux valeurs de x et de y dans l'équation de l'ellipse, il viendra

$$(3) \qquad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \lambda}}.$$

Différentions cette dernière équation, on trouve

$$\frac{dN}{d\lambda} = -\frac{N^3}{a^2} e^2 \cos\lambda \sin\lambda.$$

La relation (2) donne

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{N^3}{a^2}(1 - e^2)\cos\lambda.$$

En combinant cette dernière avec (1), il vient

$$\frac{dy}{d\lambda} = -\frac{N^3}{a^2}(1 - e^2)\sin\lambda.$$

Par suite, si R représente le rayon de courbure en M, on aura

$$(4) \qquad R = \frac{ds}{d\lambda} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d\lambda} = \frac{N^3(1 - e^2)}{a^2}.$$

Comme l'angle MOB $= \varphi$ nous a servi dans la théorie des surfaces et qu'il joue un rôle en Astronomie sous le nom de *colatitude géocentrique,* nous l'introduirons ici en désignant par ρ le rayon OM de l'ellipse. Les relations

$$x = \rho \sin\varphi = N \sin\lambda,$$
$$y = \rho \cos\varphi = N(1 - e^2)\cos\lambda = N\frac{b^2}{a^2}\cos\lambda$$

donnent, quand on porte les premières valeurs de x et de y dans l'équation de la courbe,

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}.$$

On en tire encore

$$N^2 = (a^4 \cos^2\varphi + b^4 \sin^2\varphi)\frac{\rho^2}{b^4}.$$

En désignant par ψ l'angle $\varphi - \lambda$, on aura, dans le triangle NOM,

$$\rho \cos\psi = N - ON \cos\lambda,$$
$$\rho \sin\psi = ON \sin\lambda,$$

expressions où $ON = N\cos\lambda - y = Ne^2 \cos\lambda$.

Par conséquent $\rho \cos\psi$, qui est égal à la perpendiculaire p menée

du centre sur la tangente en M, peut s'écrire

$$p = \mathrm{N} - \mathrm{ON}\cos\lambda = \mathrm{N}(1 - e^2\cos^2\lambda) = \frac{a^2}{\mathrm{N}}$$

ou, en fonction de l'angle φ,

$$p^2 = a^2 b^2 \frac{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi}.$$

Les précédentes donnent encore

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{e^2\cos\lambda\sin\lambda}{1 - e^2\cos^2\lambda} = \frac{\frac{1}{2}e^2\sin 2\lambda}{1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2\cos 2\lambda},$$

par suite

$$\psi = \frac{e^2}{2 - e^2}\sin 2\lambda + \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2 - e^2}\right)^2 \sin 4\lambda + \ldots$$

Rectification d'un arc d'ellipse.

Pour achever de réunir les formules qui nous seront nécessaires dans la suite, nous allons exprimer la longueur d'un arc s d'ellipse en fonction des colatitudes λ et λ' de ses extrémités. L'équation différentielle est $ds = \mathrm{R}\,d\lambda$, dans laquelle

$$\mathrm{R} = a(1 - e^2)(1 - e^2\cos^2\lambda)^{-\frac{3}{2}}.$$

Développons cette expression en série par la règle du binôme de Newton :

$$\mathrm{R} = a(1 - e^2)\left(1 + \tfrac{3}{2}e^2\cos^2\lambda + \tfrac{15}{8}e^4\cos^4\lambda + \tfrac{105}{48}e^6\cos^6\lambda + \ldots\right).$$

Remplaçons les puissances de $\cos\lambda$ par leurs expressions en fonction des cosinus des multiples de l'argument [1], et posons,

---

[1] Au moyen de la formule connue

$$\cos^m\lambda = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos m\lambda + m\cos(m-2)\lambda + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)\lambda + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}}\right].$$

qui nous donne

$$\cos^2\lambda = \tfrac{1}{2}\cos 2\lambda + \tfrac{1}{2},$$
$$\cos^4\lambda = \tfrac{1}{8}\cos 4\lambda + \tfrac{1}{2}\cos 2\lambda + \tfrac{3}{8},$$
$$\cos^6\lambda = \tfrac{1}{32}\cos 6\lambda + \tfrac{3}{16}\cos 4\lambda + \tfrac{15}{32}\cos 2\lambda + \tfrac{10}{32}.$$

pour abréger [1],

$$\begin{aligned}
M &= 1 + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{15}{8}\cdot\tfrac{3}{8}e^4 + \tfrac{105}{48}\cdot\tfrac{10}{32}e^6 + \ldots,\\
N &= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{15}{8}\cdot\tfrac{1}{8}e^4 + \tfrac{105}{48}\cdot\tfrac{15}{32}e^6 + \ldots,\\
P &= \tfrac{15}{8}\cdot\tfrac{1}{8}e^4 + \tfrac{105}{48}\cdot\tfrac{6}{32}e^6 + \ldots,\\
Q &= \tfrac{105}{48}\cdot\tfrac{1}{32}e^6 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

il viendra

$$R = a(1-e^2)(M + N\cos 2\lambda + P\cos 4\lambda + Q\cos 6\lambda + \ldots).$$

Il suffit dès lors de multiplier par $d\lambda$ et d'intégrer entre les limites λ et λ' :

$$\begin{aligned}
s = a(1-e^2)[&M(\lambda'-\lambda) + \tfrac{1}{2}N(\sin 2\lambda' - \sin 2\lambda)\\
&+ \tfrac{1}{4}P(\sin 4\lambda' - \sin 4\lambda) + \tfrac{1}{6}Q(\sin 6\lambda' - \sin 6\lambda) + \ldots].
\end{aligned}$$

On met ordinairement cette série sous une forme un peu plus simple en posant $\lambda' - \lambda = \alpha$, $\lambda' + \lambda = 2\lambda_1$:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
s = a(1-e^2)(&M\alpha + N\cos 2\lambda_1 \sin\alpha\\
&+ \tfrac{1}{2}P\cos 4\lambda_1 \sin 2\alpha + \tfrac{1}{3}Q\cos 6\lambda_1 \sin 3\alpha + \ldots).
\end{aligned}\right.$$

Éléments de l'ellipsoïde terrestre.

Pour juger de la courbure de notre globe, nous anticiperons sur les résultats auxquels nous parviendrons plus loin, en donnant ici les valeurs de a et de e^2 qui entrent dans les formules précédentes :

$$\begin{aligned}
a &= 6\,378\,393^{m} \pm 79^{m}, & \log a &= 6,8047113,\\
e^2 &= 0,0068395, & \log e^2 &= 7,83503 - 10.
\end{aligned}$$

Voici maintenant les valeurs des rayons de courbure principaux N et R, calculés de 5° en 5°, ainsi que celles du rayon de courbure moyen $\sqrt{NR}$. On a pris a pour unité; il suffirait donc d'ajouter le

---

[1] Il est bon de faire remarquer ici, comme moyen de vérification, qu'on doit avoir

$$M - N + P - Q + \ldots = 1.$$

En effet, à l'équateur, où $\lambda = 90°$, R se réduit à $a(1-e^2)$ en vertu de la formule (4); il en doit être de même de son expression en série, qui devient alors

$$R = a(1-e^2)(M - N + P - Q + \ldots).$$

logarithme de a aux nombres suivants pour avoir les logarithmes de ces divers rayons en mètres :

	Rayons de courbure principaux.		Rayon de courbure moyen.
Colatitude λ.	log N.	log R.	log $\sqrt{NR}$.
0°	0,0014903	0,0014903	0,0014903
5.....	0,0014789	0,0014561	0,0014675
10.....	0,0014452	0,0013550	0,0014001
15.....	0,0013901	0,0011897	0,0012899
20.....	0,0013154	0,0009656	0,0011405
25.....	0,0012233	0,0006895	0,0009564
30.....	0,0011167	0,0003697	0,0007432
35	0,0009989	0,0000160	0,0005075
40.....	0,0008733	9,9996393	0,0002563
45.....	0,0007439	9,9992510	9,9999975
50.....	0,0006145	9,9988629	9,9997387
55... .	0,0004892	9,9984864	9,9994778
60.....	0,0003716	9,9981342	9,9992529
65.....	0,0002655	9,9978156	9,9990406
70.....	0,0001738	9,9975408	9,9988573
75.....	0,0000995	9,9973179	9,9987087
80.....	0,0000448	9,9971538	9,9985993
85.....	0,0000113	9,9970533	9,9985323
90.....	0,0000000	9,9970194	9,9985097

On voit combien la surface mathématique de la Terre s'écarte peu d'une sphère. La courbure moyenne, au 45e parallèle, est à très peu près celle d'une sphère ayant pour rayon 1. De là aux pôles elle diminue peu à peu, en tout de $\frac{1}{291}$; vers l'équateur, elle augmente de $\frac{1}{291}$. La variation de courbure transversale est deux fois plus petite.

Il faudra se représenter nos triangles géodésiques comme étant reportés sur une série de sphères de rayon $\sqrt{NR}$, variant d'une manière pratiquement continue puisque les côtés de ces triangles n'ont qu'une amplitude d'une vingtaine de minutes; on devra donc, dans les formules trigonométriques données pour leur calcul, remplacer le rayon supposé constant r d'une sphère unique par le rayon moyen $\sqrt{NR}$, variable d'un triangle à l'autre. Ce changement porte seulement sur le calcul de l'excès sphérique des triangles partiels par lesquels on détermine les segments de la méridienne. Évidemment il n'y a pas de cercle vicieux à employer ici des quantités N, R qui dépendent des éléments cherchés de l'ellipsoïde terrestre, car les valeurs les plus grossièrement approchées de ces éléments suffisent amplement.

Donnons ce petit calcul pour un triangle équilatéral de 40 000^{m} de côté, pour toute l'étendue de la triangulation française :

λ.	log NR.	log a^2NR.				
40°..	0,0005	13,6099	$\log \frac{1}{2}$.....	9,6990 — 10		
45°..	0,0000	13,6094	$\log \overline{40000}^2$..	9,2041		
50°..	9,9995	13,6089	log sin 60°...	9,9375 — 10		
			log 206265″..	5,3145		
				14,1551	14,1551	14,1551
			log a^2NR ...	13,6099	13,6094	13,6089
			log ε.....	0,5452	0,5457	0,5462
			ε.....	3″,509	3″,513	3″,517

Voilà à quoi se réduit l'influence de l'aplatissement sur les calculs géodésiques dont nous nous sommes occupés jusqu'ici. Cela tient évidemment à la presque sphéricité du globe et à la petitesse de nos triangles.

Voici encore quelques données utiles sur la figure de la Terre :

λ.	log ρ.	φ − λ = ψ.	Longueur de 1° du méridien.	Longueur de 1° sur les parallèles.
°		′ ″	m	m
0.....	9,9985098	0. 0,00	111706,6	0,0
5.....	9,9985212	2. 3,34	111697,9	9735,6
10.....	9,9985551	4. 2,86	111671,8	19395,6
15.....	9,9986105	4.54,95	111629,4	28905,1
20.....	9,9986857	7.36,16	111571,8	38190,5
25.....	9,9987782	9. 3,40	111500,8	47180,3
30.....	9,9988852	10.14,02	111418,8	55805,3
35.....	9,9990034	11. 5,90	111328,1	63999,8
40.....	9,9991292	11.37,46	111231,6	71701,7
45.....	9,9992587	11.47,80	111132,2	78852,9
50.....	9,9993880	11.36,64	111033,0	85399,9
55.....	9,9995131	11. 4,34	110936,8	91294,0
60.....	9,9996303	10.11,91	110846,7	96491,9
65.....	9,9997360	9. 1,00	110765,5	100955,5
70.....	9,9998272	7.33,77	110695,4	104652,2
75.....	9,9999011	5.52,85	110638,6	107555,3
80.....	9,9999554	4. 1,30	110596,8	109648,0
85.....	9,9999888	2. 2,49	110571,2	110903,3
90.....	0,0000000	0. 0,00	110562,6	111324,0

La longueur des arcs de 1° du méridien n'a pas été calculée par la formule (5), mais par $d\varphi = R\,d\lambda$, en faisant $d\lambda = \frac{3600''}{206\,265}$, ce qui est bien suffisant.

CHAPITRE XVIII.

ARCS DE MÉRIDIENS MESURÉS EN DIVERS LIEUX.

Depuis les célèbres mesures exécutées vers 1730 par les Académiciens français en Laponie, en France et au Pérou, les travaux géodésiques ont traversé trois époques différentes.

1° Celle de la fondation du système métrique. La méridienne de France mesurée, pour la seconde fois, par Méchain et Delambre avec les méthodes et les instruments de Borda. Les mesures existantes ne permettent pas de décider de la véritable figure de la Terre; on les calcule en *supposant* que la Terre est un ellipsoïde de révolution. Aplatissement $\frac{1}{334}$.

2° Au retour de la paix, toutes les nations civilisées entreprennent des travaux géodésiques à l'imitation de la France. Apparaissent l'arc anglais de 9°, celui de Russie de 8°, celui des Indes de 3° et plusieurs petits arcs en Danemark, au Hanovre, en Prusse. Les calculs de MM. Airy et Bessel montrent que ces mesures s'accordent bien avec l'hypothèse précédente, et qu'il n'est pas nécessaire de recourir à celle d'un sphéroïde quelconque. Aplatissement de $\frac{1}{299}$.

3° C'est l'époque des arcs gigantesques, 25° en Russie, 22° par l'Angleterre et la France, 24° aux Indes, l'arc de Lacaille au Cap mesuré de nouveau et étendu à 4° par les Anglais. Le calcul de ces mesures *prouve* que la Terre est sensiblement un ellipsoïde de révolution. Aplatissement $\frac{1}{292}$.

Pendant ce temps la figure de la Terre était étudiée au moyen des observations du pendule dont Picard, puis Bouguer et La Condamine donnèrent les premiers exemples. Par cette méthode, totalement indépendante de la première, on trouve aujourd'hui $\frac{1}{292,2}$ pour l'aplatissement.

C'est cet ensemble de mesures et de calculs que nous allons ex-

poser. Voici le Tableau des mesures effectuées. On ne s'est pas contenté d'observer les colatitudes λ et λ′ aux deux bouts de l'arc mesuré; on les a déterminées également en un certain nombre de stations intermédiaires, afin de multiplier les moyens de comparaison entre la figure théorique de la Terre et sa figure réelle.

TABLEAU DES ARCS MÉRIDIENS ACTUELLEMENT MESURÉS.

Stations.	Colatitudes.	Longueurs des arcs
	Arc russo-suédois.	
	° ′ ″	T
Fuglenaes	19.19.48,7	0,0
Stuor-Oïvi	21.19. 1,6	113 753,9
Tornea	24.10.15,3	276 975,8
Kilpi	27.21.55,0	459 770,1
Hogland	29.54.49,9	605 483,7
Dorpat	31.37.12,4	703 022,3
Jacobstadt	33.29.55,2	810 302,9
Nemesch	35.20.54,1	916 033,8
Belin	37.57.17,8	1 064 843,3
Kremenetz	39.54.10,0	1 176 062,3
Ssuprunkowski	41.14.56,9	1 252 813,7
Wodolui	42.58.34,8	1 351 371,7
Nekrassowka	44.39.57,2	1 447 786,8 = 6T,2
	Arc anglo-français.	
Saxaword	29.10.21,4	0,0
Great Stirling	32.32.10,9	192 273,0
Durham	35.13.53,8	346 261,5
Greenwich	38.31.21,7	534 146,6
Dunkerque	38.57.51,6	559 388,3
Panthéon	41. 9.10,6	684 333,1
Carcassonne	46.47. 5,7	1 005 472,9
Barcelone	48.37.12,1	1 110 028,8
Montjouy	48.38.15,0	1 110 972,9
Formentera	51.20. 3,9	1 264 645,5
	Arc de Prusse.	
Memel	34.16.19,6	0,0
Kœnigsberg	35.17. 9,5	57 965,4
Trunz	35.46.48,5	86 177,0

Stations.	Colatitudes.	Longueurs des arcs.
	Arc danois.	
Lyssabel	35°. 5'.49",6	T 0,0
Lauenbourg	36.27.43,0	87 436,5
	Arc de Hanovre.	
Altona	36.27.14,7	0,0
Gœttingue	38.28.12,1	115 163,7
	Arc des Indes.	
Shahpur	57.38.25,9	0,0
Khimnana	59.37.48,2	94 150,9
Kaliana	60.29.11,7	142 807,3
Garinda	62. 4.30,0	233 214,8
Khamor	64.14.49,1	356 620,7
Kalianpur	65.52.49,2	449 499,9
Fikri	67.58.56,2	568 950,2
Walwari	69.15.38,7	641 455,3
Damargidda	71.56.45,2	793 999,4
Darur	73.50.13,9	901 434,0
Honur	75. 4.38,5	971 864,6
Bangalore	77. 0. 8,2	1 081 021,8
Putchapoliam	79. 0.18,9	1 194 776,9
Kudankulam	81.47.49,6	1 353 210,9
	Arc du Pérou.	
Cotchesqui	89.57.28,6	0,0
Tarqui	93. 4.32,1	176 875,5
	Arc du Cap.	
North-End	119.44.17,7	0,0
Heeren logement Berg	121.58. 9,1	126 906,5
Royal Observatory	123.56. 3,2	238 701,8
Zwarte Kop	124.13.32,1	255 308,6
Cape Point	124.21. 6,3	262 468,6

Détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre.

Bien qu'on ait déterminé sur chaque arc la colatitude de plusieurs stations intermédiaires, afin d'étudier en détail la figure de

la Terre dans ces régions, nous n'emploierons, pour abréger, que l'arc total et les colatitudes extrêmes. Si la Terre est réellement un ellipsoïde de révolution aplati aux pôles, l'arc s du méridien s'exprimera par la formule (5). En effectuant les produits de M, N, P, ... par $1 - e^2$, on aura

$$(6)\quad \begin{cases} s = a\Big[\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4\right)\dfrac{\alpha}{206\,265''} \\ \qquad + \left(\frac{3}{4}e^2 + \frac{12}{64}e^4\right)\sin\alpha\cos 2\lambda_1 + \frac{15}{128}e^4\sin 2\alpha\cos 4\lambda_1\Big], \end{cases}$$

Nous négligerons les termes en e^6; ils influent à peine sur le chiffre des dixièmes de toise. Pour former les équations de condition linéaires que nous traiterons par la méthode des moindres carrés, il faut obtenir, au préalable, des valeurs approchées des inconnues a et e^2. Les observations du pendule nous ont donné (p. 206) $\mu = \frac{1}{294}$. On en déduit $\log e^2 = 7,83194$. L'arc russo-suédois, calculé par la formule (1) avec cette valeur, donne

$$a = 3\,272\,625^{\mathrm{T}}.$$

Avec cette première évaluation de a et de e^2 la formule (6) devient

$$(s) = [1,199\,7322]\alpha + [4,222\,63]\sin\alpha\cos 2\lambda_1 + [1,250]\sin 2\alpha\cos 4\lambda_1 \quad (^1).$$

En calculant par cette formule les longueurs des arcs mesurés on trouve :

	s observé.	(s) calculé.	$s - (s)$.
	T	T	T
Arc russo-suédois	1 447 786,7	0,0	0,0
Arc anglo-français	1 264 645,8	1 264 692,7	- 46,9
Arc de Prusse.....	86 177,0	86 134,8	- 38,6
Arc de Danemark	87 437,0	87 466,7	30,2
Arc de Hanovre.....	115 164,0	115 102,8	- 60,9
Arc des Indes.....	1 353 210,9	1 353 278,3	- 67,4
Arc du Pérou.....	176 875,5	176 866,0	- 9,5
Arc d'Afrique.... .. .	262 470,4	262 477,7	— 7,3

Ainsi les valeurs provisoires de a et e^2 sont déjà très approchées.

(1) Ici α est exprimé en secondes et les coefficients entre parenthèses sont des logarithmes.

Nous allons les faire varier de petites quantités ∂a et ∂e^2, de manière à réduire la somme des carrés des écarts au minimum. L'expression précédente de (s), différentiée par rapport à a et e^2, donne

$$s - (s) = \frac{(s)}{a} da + [-\alpha(\tfrac{1}{4} + \tfrac{6}{64} e^2) + (\tfrac{3}{4} + \tfrac{24}{64} e^2) \sin\alpha \cos 2\lambda_1 + \tfrac{13}{64} e^2 \sin 2\alpha \cos 4\lambda_1] a de^2;$$

il suffit d'y introduire les données numériques relatives à chaque arc; on forme ainsi les équations de condition suivantes :

				Résidus.
			T	T
Arc russo-suédois ...	$0,4424\,\partial a$	$+ 0,0296\,a\,\partial e^2$	$= 0,0$	$+ 11,8$
Arc anglo-français ..	0,3864	$- 0,0512$	$- 46,9$	$- 22,4$
Arc de Prusse	0,0263	$- 0,0001$	$- 38,6$	$- 39,6$
Arc de Danemark ...	0,0267	$- 0,0005$	$- 30,2$	$- 29,1$
Arc de Hanovre.....	0,0352	$- 0,0020$	$- 60,9$	$- 62,5$
Arc des Indes.....	0,4135	$- 0,3361$	$- 67,4$	$- 1,1$
Arc du Pérou.....	0,0540	$- 0,0543$	$- 9,5$	$- 20,1$
Arc du Cap.....	0,0802	$- 0,0668$	$- 7,3$	$- 3,1$

On voit que les petits arcs de Prusse, de Danemark et de Hanovre sont sans influence sur la détermination de e^2. A cet égard l'arc indien est tout à fait prépondérant. Les équations finales

$$0,5280\,\partial a - 0,1524\,a\,\partial e^2 = -43,71,$$
$$-0,1524\,\partial a + 0,1216\,a\,\partial e^2 = +24,88$$

donnent

$$a = -37^{\mathrm{T}},2, \quad a\,\partial e^2 = +158^{\mathrm{T}},05,$$

d'où

$$\partial e^2 = 0,000\,048\,3 \quad \text{et} \quad e^2 = 0,006\,839\,5; \quad \log e^2 = 7,835\,02.$$

Si l'on pose $\mu = \frac{1}{\nu}$, comme $1 - e^2 = (1 - \mu)^2$, la correction $\partial\nu$ du dénominateur 294 de l'aplatissement est

$$\partial\nu = -\frac{\nu^3}{2(\nu - 1)} \partial e^2.$$

Ici l'on trouve

$$\partial\nu = -2,09.$$

En portant les valeurs de ∂a et de $a\,\partial e^2$ dans les équations de condition, on obtient les résidus inscrits à côté de ces équations. La

racine carrée de la somme des carrés divisée par $8 - 2$ est $\pm 35^{\mathrm{T}},07$, dont le produit par $0,6745$ donne $\pm 23^{\mathrm{T}},6$ pour l'erreur probable d'une mesure d'arc de méridien. On résoudra de nouveau les deux équations précédentes après y avoir remplacé ∂a par x, $a\partial e^2$ par y et les seconds membres par 1 et 0; on trouve ainsi

$$\sqrt{x} = 1,7;$$

par suite, l'erreur probable de a sera

$$\pm 23^{\mathrm{T}},6 \times 1,7 = 40^{\mathrm{T}},7.$$

On résoudra les mêmes équations après avoir remplacé les seconds membres par 0 et 1; on trouve ainsi

$$\sqrt{y} = 3,6;$$

l'erreur probable de $a\partial e^2$ est donc $\pm 84^{\mathrm{T}},7$ et celle du dénominateur de μ sera $\pm 1,1$. La solution est donc

$$a = 3,272\,587^{\mathrm{T}},6 \pm 40^{\mathrm{T}},7 \quad (^1), \quad \mu = \frac{1}{291,9 \pm 1,1},$$

ce qui donne

$$s = [1,199\,722\,0]\,\alpha'' + [4,225\,71]\sin\alpha\cos 2\lambda_1 + [1,254]\sin 2\alpha\cos 4\lambda_1.$$

Le coefficient de $a\partial e^2$ dans l'équation relative aux Indes est si prépondérant qu'on pourrait craindre que cette valeur de μ ne fût réellement déterminée que pour cette région de la Terre. Il n'en est rien : si l'on supprime la sixième équation, on trouve

$$a = 3\,272\,588^{\mathrm{T}},0 \quad \mu = \frac{1}{291,4},$$

résultats à très peu près identiques aux précédents, sauf que l'incertitude de la valeur de μ est plus forte.

La première conclusion à tirer de ces calculs est que la surface mathématique du globe terrestre, celle des mers idéalement prolongée par des canaux par-dessous les continents, est *à très peu près* un ellipsoïde de révolution. Comme tous les grands arcs

(1) En mètres, $a = 6\,378\,393^{\mathrm{m}} \pm 79^{\mathrm{m}}$.

se trouvent dans l'hémisphère nord, on pourrait craindre que l'autre hémisphère ne présentât des différences sensibles qui nous échapperaient ici, à cause de la petitesse de l'arc du Cap, mais les observations du pendule ne semblent pas confirmer cette crainte (¹). D'après les calculs récents du colonel Clarke, comprenant toutes les observations de ce genre faites sur les deux hémisphères, on a

$$\mu = \frac{1}{292,2 \pm 1,5},$$

valeur bien préférable à celle de la page 206 et qui s'accorde très bien avec la précédente.

Une dernière remarque sur ces calculs. Nous avons traité les écarts ou résidus comme si leur grandeur probable était la même quelle que fût l'étendue des arcs mesurés. Cela n'est pas tout à fait exact. Mais les opérations géodésiques sont d'une précision telle que leurs erreurs propres sont à peu près négligeables, même pour les plus grands arcs. Ainsi l'erreur probable de l'arc russo-suédois, en ce qui concerne la partie géodésique, n'est que de $\pm 6^{\tau}$, malgré son énorme amplitude de 25°. Il n'en est pas de même, comme on le verra au Chapitre suivant, des colatitudes des extrémités. Là est donc la source principale, on peut dire *a posteriori* presque unique, des écarts ci-dessus. Or la détermination de ces colatitudes est indépendante de la longueur de l'arc s.

(¹) Cependant M. Saigey avait trouvé autrefois $\frac{1}{111}$ pour l'hémisphère boréal et $\frac{1}{116}$ pour l'hémisphère austral; mais les observations du pendule n'ont pas encore la précision nécessaire pour résoudre une question pareille.

CHAPITRE XIX.

IRRÉGULARITÉS DE LA SURFACE DE NIVEAU. ATTRACTIONS LOCALES.

Il faut se rendre compte de la restriction exprimée par ces mots: *à très peu près*. Les mesures géodésiques les plus longues donnent s avec une incertitude de 5^T ou 6^T seulement; les amplitudes astronomiques sont mesurées à $\pm 0'',7$ près, ce qui équivaut à $15^T \times 0,7 = 10^T,5$ d'incertitude sur s. En réunissant ces deux causes d'erreur, on trouve

$$\sqrt{5^2 + 10,5^2} = \pm 12^T$$

pour l'erreur probable d'un arc mesuré, tandis que le calcul basé sur l'hypothèse de l'ellipsoïde de révolution laisse subsister des écarts qui s'élèvent parfois à 60^T et dont la valeur probable est de $\pm 23^T,6$. La théorie conduit donc à des écarts que ne comporte pas, à première vue, la précision des mesures. Examinons de plus près cette question en comparant tous les segments de l'un des grands arcs, celui des Indes par exemple, avec les (s) correspondants. On trouve ainsi les nombres de la première colonne.

	Observation — Calcul.		
	T	T	
Shahpur.....	0,0	+ 51,5	3",4
Khimnana.....	+ 58,9	+ 7,4	1,0
Kaliana.....	+ 113,4	+ 61,9	+ 4,1
Garinda.....	+ 2,8	+ 54,3	+ 3,6
Khamor.....	+ 86,8	+ 31,3	+ 2,1
Kalianpur.....	+ 33,9	+ 17,6	+ 1,2
Fikri.....	— 8,4	+ 43,1	+ 2,9
Walwar.....	— 125,9	+ 74,4	— 4,96
Damargidda...	+ 71,3	+ 19,8	+ 1,3
Darur.....	+ 120,5	+ 69,0	+ 4,6

	Observation — Calcul.		
	T	T	
Honur.....	+ 5,9	+ 57,4	+ 3",8
Bangalore.....	— 96,9	— 45,4	— 3,0
Putchapoliam..	— 14,4	+ 37,1	+ 2,5
Kudankulam...	+ 1,1	+ 50,4	+ 3,3

Si l'on désigne par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{14}$ les corrections relatives aux diverses stations, pour répartir entre elles les écarts selon la règle de probabilité, on aura les équations de condition

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= -\ 58,9, \\ x_3 - x_1 &= -\ 113,4, \\ x_4 - x_1 &= +\ \ 2,8, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{14} - x_1 &= +\ \ 1,1, \end{aligned}$$

et pour la condition du minimum de la somme des carrés $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{14}^2$,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{14} = 0.$$

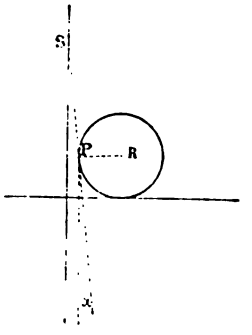
On en déduit $x_1 = +51^{\mathrm{T}},5$, et en ajoutant 51,5 à tous les nombres de la première colonne on obtient ceux de la deuxième. Mais, à cause de la grande précision des mesures géodésiques, et en considérant que les influences locales portent sur la direction de la pesanteur, c'est-à-dire de la verticale, il est naturel d'attribuer ces écarts aux colatitudes et non aux longueurs des arcs s : nous les transformerons donc en secondes en les divisant par 15^{T}, et nous aurons ainsi les écarts en colatitude consignés dans la dernière colonne.

Attraction des montagnes.

L'ellipsoïde de révolution dont nous avons donné les éléments représente l'arc entier des Indes, sauf de petits écarts imputables à des causes locales accidentelles, car ces écarts ont lieu tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, changeant huit fois de signe sur une étendue de 23°. On en retrouverait d'analogues pour l'arc russe ou l'arc anglo-francais et, en général, dans toutes les mesures de ce genre. Ils s'expliquent par des variations brusques de

densité dans l'épaisseur de l'écorce terrestre, telle que les dykes de matériaux très denses (basalte, serpentine) qui ont été injectés çà et là de bas en haut, à l'état liquide ou pâteux, dans des fissures plus ou moins larges, ou bien encore des saillies superficielles, collines ou montagnes isolées. Dans le voisinage immédiat de ces accidents, le fil à plomb est légèrement dévié; il se produit une petite ondulation dans la surface de niveau qui n'en altère pas sensiblement la figure générale.

Fig. 90.



Pour fixer à ce sujet les idées, cherchons la déviation maximum α qu'une masse sphérique de rayon r et de densité δ imprimerait au fil à plomb, tout près de sa surface. En représentant les attractions de cette masse et du globe terrestre sur le point P par PR et PQ, on a

$$\tang \alpha = \frac{PR}{PQ}.$$

Ces attractions étant proportionnelles aux masses et réciproques aux carrés des distances aux centres de ces sphères, si l'on désigne par r, R, δ, Δ les rayons et leurs densités, on aura

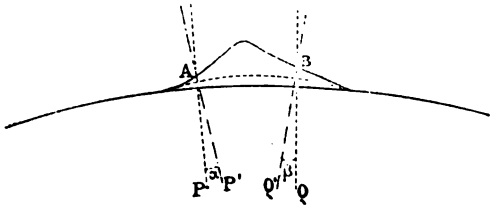
$$\tang \alpha = \frac{\dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3 \delta}{r^2}}{\dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3 \Delta}{R^2}} = \frac{r\delta}{R\Delta}.$$

Si la sphère m est formée des éléments de la croûte superficielle, δ sera à peu près égal à $\frac{1}{2}\Delta$; par conséquent

$$\alpha = \frac{r}{2R}\, 206\,265''.$$

La déviation α sera d'une seconde, si $r = 64^m$. Bouguer, à qui cette remarque est due, en a conclu la possibilité de déterminer la densité moyenne Δ du globe terrestre en observant la déviation du fil à plomb occasionnée par le voisinage d'une montagne, et il a exécuté l'expérience au Pérou, sur le Chimboraço. Plus tard, Maskelyne a répété l'expérience de Bouguer sur une montagne d'Écosse, le Shehallien. En voici les détails. L'astronome anglais commença

Fig. 91.



par observer les colatitudes λ et λ' de deux stations A, B, au pied de la montagne, l'une au nord, l'autre au sud; puis il mesura, par une série de triangles contournant la montagne, l'arc de grand cercle a compris entre ces stations. L'excès de l'amplitude astronomique $\lambda' - \lambda$ de cet arc sur son amplitude géodésique $206\,265'' \frac{a}{N}$ se trouva être de $11''$; c'était la somme des déviations de sens contraire que la montagne produisait dans les verticales des deux stations. D'autre part, un habile géologue, Hutton, cuba la montagne au moyen d'une opération topographique et en détermina la densité moyenne 2,7. Pour calculer son attraction sur le fil à plomb, on la décomposa en prismes verticaux dont l'action fut calculée une à une; et finalement, de l'attraction totale comparée à celle du globe, on conclut 1,8 pour le rapport des densités. On trouva ainsi $\Delta = 4,5$. Les officiers anglais attachés aux opérations géodésiques du Royaume-Uni ont répété les mêmes mesures sur une colline d'Édimbourg, l'*Arthur Seat,* et ont obtenu $\Delta = 5,3$.

Constitution intérieure de la croûte terrestre.

Ainsi ces accidents ne produisent, dans la figure générale du globe terrestre, que de petites altérations purement locales. Mais si des collines ou des montagnes isolées n'ont pas d'autre action,

il semblerait que les grandes irrégularités superficielles, l'inégale répartition des mers et des continents, dont la densité varie brusquement de 1 à 2,7, devraient altérer bien plus profondément cette figure. Aussi les géomètres étaient-ils d'avis, au commencement de ce siècle, que si le globe à l'état de fusion ignée, et composé de couches homogènes rangées par ordre de densités, avait pris la figure d'un ellipsoïde de révolution aplati, cette figure première d'équilibre n'avait pu subsister à la suite des dislocations que la croûte a subies en s'épaississant, et de la répartition si inégale qui s'est faite, à la surface et jusqu'à une certaine profondeur, entre les matériaux les plus denses et les plus légers. Dans leur opinion, cette figure avait dû s'altérer, et n'être plus aujourd'hui qu'un sphéroïde à méridiens inégaux non elliptiques.

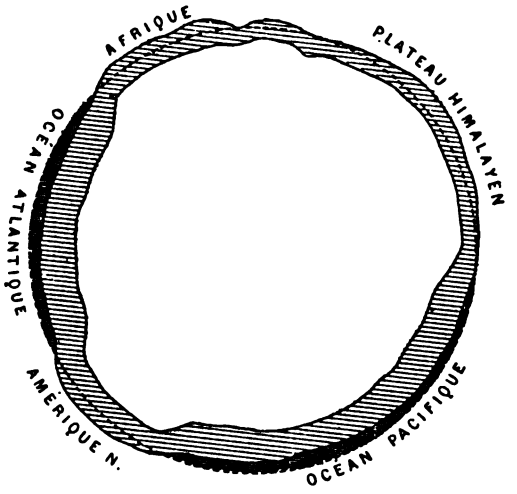
On vient de voir, au contraire, par la discussion des mesures de degré les plus étendues, que la figure de l'ellipsoïde de révolution subsiste encore. Pour que la figure première se soit ainsi conservée à travers les âges géologiques, il faut que l'excès de densité des continents émergés soit compensé par quelque défaut de densité au-dessous, et que la légèreté spécifique des mers soit pareillement compensée par des couches inférieures plus denses.

La cause physique qui a produit cette compensation remarquable est bien simple. Au-dessous des mers, le refroidissement va plus vite et plus profondément que sous les continents. Les sondages exécutés en plein océan nous ont appris, en effet, qu'à 3700^{m} de profondeur la température de l'eau est d'environ 1° (M. de Tessan, *Voyage de circumnavigation de la frégate* la Vénus, *commandant Dupetit-Thouars*, 1835), tandis qu'à la même profondeur, sous un continent, la température s'élèverait à 150°. La croûte terrestre doit donc avoir acquis dans le premier cas bien plus d'épaisseur que dans le second. C'est ce que j'ai tâché de représenter dans la figure ci-jointe.

Elle représente une coupe du globe terrestre suivant le parallèle de 60°. La ligne pointillée marque le niveau des mers prolongé par-dessous les continents : c'est, comme nous venons de le constater dans son ensemble, une véritable circonférence. Au-dessus de cette ligne s'élèvent les continents d'Afrique, d'Asie et d'Amérique et en particulier le plateau de l'Himalaya. Au-dessous se trouvent les deux grands océans, dont la profondeur moyenne est

comparable à la saillie des continents. Là l'épaisseur de la croûte terrestre solidifiée compense le défaut de densité des mers, tandis que, sous les continents, la minceur relative de la croûte compense la saillie des terres émergées. A mesure que le refroidissement progresse, cette différence d'épaisseur augmente ; la croûte sous-ma-

Fig. 92.



rine exerce un léger excès de pression sur le noyau liquide, et, comme cette pression se transmet en tous sens, elle tend à soulever de plus en plus l'écorce moins résistante et déjà fracturée des continents. Là est la cause des lents phénomènes géologiques qui ont façonné et remanient encore aujourd'hui les couches supérieures de la Terre.

S'il en est ainsi, on conçoit que l'équilibre premier subsiste, que la surface mathématique du globe ne soit pas sensiblement altérée, non plus que la direction de l'axe de rotation. Mais aussi il n'y aura lieu de tenir compte des grandes inégalités de la couche superficielle, ni dans la mesure des degrés, ni dans l'observation du pendule.

C'est justement le contraire que l'on a fait jusqu'ici pour ces dernières mesures. On ne se contente pas de réduire la pesanteur observée au niveau des mers : on la corrige en outre de l'attraction du plateau continental sur lequel on a observé.

Première correction. — Soient h la hauteur de ce continent, et en même temps l'altitude du lieu d'observation, R le rayon de la Terre. La pesanteur y sera diminuée dans le rapport de 1 à $\left(\frac{R+h}{R}\right)^2$, ou, comme h est très petit par rapport à R, dans le rapport de à $1+\frac{2h}{R}$. Si l est la longueur du pendule observée à la station, l_0 cette longueur ramenée au niveau de la mer, on aura donc

$$l_0 = l\left(1+\frac{2h}{R}\right).$$

Seconde correction. — Assimilons le massif continental sur lequel on a opéré à un cylindre plat de rayon X, de hauteur h et de densité δ. Son attraction s'ajoutant, à ce que l'on suppose, à celle du globe terrestre, fera paraître celle-ci trop forte et allongera un peu la longueur du pendule qu'on aurait obtenue sans sa présence. Pour la déterminer, décomposons ce cylindre en tranches d'épaisseur dh, et prenons dans une de ces tranches un anneau circulaire de rayon x et de largeur dx. La masse de ce dernier sera $2\pi\delta x\,dx$; son potentiel par rapport à la station, c'est-à-dire la somme des masses élémentaires divisées respectivement par leur distanee à la station, sera

$$\frac{2\pi\delta x\,dx\,dh}{\sqrt{x^2+h^2}}.$$

L'intégrale prise de $x=0$ à $x=X$, ou

$$2\pi\delta\,dh\left(\sqrt{X^2+h^2}-h\right),$$

sera le potentiel de la tranche d'épaisseur dh et de rayon X, ou, comme X est très grand par rapport à h,

$$2\pi\delta\,dh(X-h).$$

L'attraction de cette tranche sur le pendule étant, à un facteur constant près, la différentielle de cette expression divisée par $-dh$, elle se réduira à $2\pi\delta\,dh$, et celle du cylindre entier de hauteur h sera $2\pi\delta h$. Son rapport à l'attraction du globe exprimée par $\frac{4}{3}\pi R^3\Delta$, au même facteur près, ou $\frac{4}{3}\pi\Delta$ en prenant R pour unité, sera $\frac{3}{2}h\frac{\delta}{\Delta}$, ou simplement $\frac{3}{4}h$, puisque la densité des continents est à peu près la moitié de la densité moyenne Δ de la Terre.

D'après cela on aurait, pour le pendule réduit au niveau de la mer et corrigé de l'attraction de la masse du continent,

$$l_0 = l(1 + 2h - \tfrac{3}{4}h) = l(1 + \tfrac{5}{4}h).$$

Mais l'observation ne justifie nullement l'introduction de cette seconde correction, c'est-à-dire du terme $-\frac{3}{4}h$. Voici comme exemple celles de Bouguer à l'équateur :

Station.	Altitude.	l observé.	l réduit par $(1+2h)l$.	l réduit par $(1+\frac{5}{4}h)l$.
	m	mm	mm	mm
Ile de l'Inca..	78	990,911	990,935	990,926
Quito.....	2857	990,121	991,008	990,675
		Différence...	+ 0,073	— 0,251

Dans le premier cas la différence est à peu près de l'ordre des erreurs d'observation; dans le second elle s'élève à $\frac{1}{4}$ de millimètre, ce qui est inadmissible. Les observations du pendule faites récemment par les officiers anglais, aux Indes et sur les hauts plateaux du continent asiatique, sont encore plus manifestement en désaccord avec cette seconde correction; elle leur a donné partout des l_0 beaucoup trop petits, comme s'il y avait sous ces plateaux de grandes cavités vides de matière.

Par la même raison qu'on a cru devoir retrancher, de la pesanteur observée sur les continents, l'attraction exercée par la saillie continentale, il aurait fallu, pour les observations faites en mer, ajouter quelque chose pour tenir compte du défaut de densité de l'eau qui remplace ici le massif continental. Heureusement on ne s'en est pas avisé.

En résumé, la longueur du pendule simple suit la loi de Clairaut : elle s'adapte parfaitement à l'ellipsoïde lorsqu'on la réduit au niveau des mers sans tenir compte, soit des saillies continentales, soit de la trop faible densité des océans. Ce résultat confirme donc pleinement la compensation que M. Pratt déduisait déjà de la discussion des degrés mesurés aux Indes, en disant que la quantité de matière contenue dans chaque colonne verticale, allant de la surface jusqu'à une nappe de niveau inférieure, devait être partout la même. Nous venons d'indiquer la raison physique de cette singulière compensation; elle tient à la rapidité du refroidissement

plus grande sous les mers que sous les continents. C'est ainsi que la Géologie se trouve rattachée désormais à la Géodésie, dont elle semblait autrefois être absolument indépendante.

Quant aux accidents superficiels, une colline, une montagne, une dépression du sol, un épanchement de matières lourdes venues de l'intérieur à l'état de fusion par les failles de l'écorce terrestre, il n'y a pas de compensation; leur effet sur la figure de la Terre se traduit par de petites ondulations qui n'en altèrent pas sensiblement la forme générale. Leur étude est un des buts de la Géodésie, mais elle ne saurait être développée ici (1).

---

(1) Nous renvoyons pour cela à la *Mécanique céleste* et aux Mémoires de M. Villarceau sur les attractions locales.

CHAPITRE XX.

SYSTÈME MÉTRIQUE.

Lorsque la Commission du système métrique, convoquée à Paris à la fin du dernier siècle, se décida à prendre pour unité de longueur la 10 000 000e partie de quart du méridien, elle présumait que la Terre était un ellipsoïde de révolution; on vient de voir que l'ensemble des mesures géodésiques actuelles lui donne raison sur ce point. A cette époque, on ne disposait que des arcs de France et du Pérou que nous avons rapportés plus haut. En introduisant ces données dans l'expression de s que nous venons d'employer, on forme deux équations distinctes entre a et e^2, et en les divisant membre à membre on obtient une équation en e^2 et e^4. La Commission a trouvé ainsi $e^2 = 0,005979$, ce qui répond à un aplatissement de $\frac{1}{331}$.

Pour avoir le quart du méridien, que nous désignerons par Q, il suffit de faire $\lambda = 0$, $\lambda' = 90^\circ$ dans l'équation (6) de la page 296, ce qui donne $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ (en parties du rayon), $2\lambda_1 = 90^\circ$; par conséquent,

$$Q = a\left(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{3}{64}e^4\right)\frac{\pi}{2}.$$

En divisant S par Q on élimine a et on a

$$\frac{S}{Q} = \frac{\alpha}{206\,265''}\,\frac{2}{\pi} + \left(\tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{24}{64}e^4\right)\frac{2}{\pi}\sin\alpha\cos 2\lambda_1 + \tfrac{15}{128}e^4\,\frac{2}{\pi}\sin 2\alpha\cos 4\lambda_1,$$

équation où l'on mettra pour S la longueur de l'arc français.

On sentait bien que e^2 n'était pas déterminé avec une précision suffisante par les seuls arcs de France et du Pérou, mais la Commission trouva, dans une particularité de l'arc français, le moyen d'éluder cette incertitude. C'était de prolonger cet arc jusqu'à l'île

Formentera (une des Baléares). Dans ces conditions, en effet, l'arc français se trouvant bissecté exactement par le parallèle de 45°, on a $\lambda_1 = 45°$, et l'équation précédente se réduit à

$$\frac{S}{Q} = \frac{\alpha}{206\,265}\,\frac{2}{\pi} + \frac{15}{128}\,e^4\,\frac{2}{\pi}\,\sin 2\alpha;$$

e^2 a disparu; l'incertitude ne porte plus que sur le dernier terme, qui est lui-même extrêmement petit.

On résolut donc : 1° de reprendre la mesure de Cassini, de Dunkerque à Perpignan, parce que cette mesure n'avait pas la précision requise; 2° de la prolonger, à travers le territoire espagnol, jusqu'à l'île de Formentera (¹).

L'arc français ainsi porté à 12° n'aurait encore été que le $\frac{1}{7}$ ou le $\frac{1}{8}$ de Q. Toute erreur commise dans cette mesure devait donc être multipliée par 7,5. De là la nécessité de donner aux opérations géodésiques et astronomiques une précision toute nouvelle.

En effet, pour avoir le mètre à $0^{mm},1$ près, il fallait être sûr de ne pas commettre sur Q une erreur de $1\,000^m$ ou de 500^T, et, par suite, de 67^T sur s, c'est-à-dire sur la longueur de l'arc français. De plus, en supposant un succès complet dans la partie géodésique, il fallait que l'amplitude astronomique $\lambda' - \lambda$ ou α ne comportât pas une erreur de $4''$, car $4''$, à raison de 15^T pour $1''$, font aussi 69^T. Il fallait donc déterminer les colatitudes à $1''$ près, degré de précision dont on était bien loin à cette époque.

Borda fut chargé de créer des instruments nouveaux. Il produisit, à cette ocasion, l'invention du cercle répétiteur, si précieux à une époque où l'art de diviser les cercles des instruments était encore dans l'enfance, l'invention des règles de platine à thermomètre bimétallique, etc. Les opérations géodésiques furent exécutées au milieu de mille difficultés par deux excellents astronomes, au nord par Delambre, au sud par Méchain. Mais la guerre vint interrompre les opérations que Méchain poursuivait en Espagne; on dut se contenter de l'arc de 9°,5 compris entre Dunkerque et Montjouy près de Barcelone; e^2 reparut dans l'équation finale,

(¹) Le prolongement de la méridienne de France jusqu'à Formentera a été exécuté longtemps après l'établissement du système métrique par Biot et Arago, et ne lui a servi que de vérification.

heureusement avec un très petit coefficient. Le calcul fut fait de la manière suivante :

Dunkerque..	$38^\circ.57'.49'',5$	$s = 551583^{\mathrm{T}},6$		
Montjouy...	$48.38.15,2$			
α.....	$9.40.25,7 = 34825'',7$		$\log \alpha''$	$4,5418999$
$2\lambda_1$.....	$87.36.\ 4,7$		206265.....	$5,3144251$
2α.....	$19.20.51,4$		$\log \alpha$.....	$9,2274748$
$4\lambda_1$.....	$175.12.\ 9,4$		$\log \frac{2}{\pi}$.....	$9,8038801$
			log 1er terme.	$9,0313549$

$\log e^2$.....	$7,77663$	$\log e^4$.....	$5,55326$
$\log \frac{3}{4}$.....	$9,87506$	$\log \frac{25}{64}$.....	$9,57403$
	$7,65169$		$5,12729$

$\frac{3}{4}e^2$....	$0,0044842$		$7,65298$	$\log e^4$.....	$5,55326$
$\frac{25}{64}e^4$...	$0,0000134$	$\log \frac{2}{\pi}$.....	$9,80388$	$\log \frac{15}{128}$.....	$9,06888$
	$0,0044976$	$\log \sin \alpha$... .	$9,22541$	$\log \frac{2}{\pi}$.....	$9,80388$
		$\log \cos 2\lambda_1$..	$8,62172$	$\log \sin 2\alpha$...	$9,52022$
		log 2e terme.	$5,30399$	$\log \cos 4\lambda_1$..	$9,99848\,n$
				log 3e terme.	$3,94472\,n$

1er terme	$0,10748673$
2e »	$0,00002014$
3e »	$-0,00000088$
	$0,10750599$

Par conséquent,

$$\frac{551583,6}{Q} = 0,10750655.$$

$\log s$.....	$5,7416114$
	$9,0314327$
$\log Q$.....	$6,7101787$

$Q = 5130725^{\mathrm{T}}$

Le nombre de la Commission est, comme on sait, $5\,130\,740^{\mathrm{T}}$. Mais ce qu'on ignorait alors et ce que nous savons aujourd'hui, c'est que les attractions purement locales, accidentelles, peuvent fort bien altérer de quelques secondes l'amplitude angulaire d'un arc géodésique. En outre, malgré l'habileté des astronomes Delambre et Méchain, qui ont fait la triangulation et déterminé les colatitudes

extrêmes, le défaut inhérent aux instruments répétiteurs dont nous avons donné l'explication à la page 107 est fort capable de fausser sensiblement les colatitudes. Il suffirait de 6″ d'erreur, provenant de ces deux causes réunies, sur l'amplitude astronomique de l'arc compris entre Dunkerque et Montjouy, pour introduire une erreur de 90^T dans la longueur calculée de s et, par suite, de 900^T dans celle de a.

En fait, nous sommes aujourd'hui en état de soumettre les opérations de la grande Commission à une vérification rigoureuse. Il suffit pour cela de faire $\alpha = 90° = 324\,000''$ dans le premier terme de la valeur de s que nous avons déduite, page 298, de l'ensemble des mesures existantes :

log 1er coefficient.....	1,1997220
log 324000.....	5,5105450
log Q.....	6,7102670

$$Q = 5131758^T.$$

Ainsi, l'erreur de la Commission est 1018^T; le mètre est trop court d'un dix-millième de toise ou de $0^l,0864$. Au lieu de prendre pour le mètre $3^p\,11^l,296$, il aurait fallu $3^p\,11^l,382$.

Faut-il changer la longueur de l'étalon légal et lui donner la longueur susdite, qui est plus exacte et représente mieux la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre ?

Si l'on agissait ainsi, on sacrifierait le côté essentiel de tout système de poids et de mesures, c'est-à-dire l'invariabilité. La longueur de l'étalon, au lieu d'être fixe, deviendrait une quantité variable et relative aux progrès de la Science. Il est probable que le chiffre actuel, $5\,141\,743^T$, subira à son tour des modifications, lorsque l'arc anglo-franco-espagnol sera poussé aux limites du Sahara, et lorsque les grandes opérations géodésiques des États-Unis et du Brésil seront terminées. Alors il faudrait encore retoucher le mètre étalon, et ainsi de suite, ce qui serait absurde.

La définition légale du mètre n'est pas de dire : *c'est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre;* mais bien : le mètre est la longueur, de bout en bout, d'une règle de platine qui a été prise pour unité de longueur en vertu d'une loi, et qui est déposée aux Archives nationales. A quoi l'on doit ajouter, à titre de renseignement précieux, que cette longueur est, à très peu

près, la dix-millionième partie du quart du méridien, et qu'on peut l'employer comme telle, sans erreur sensible, dans toutes les applications à la géographie et à la navigation.

Une nouvelle Commission internationale, ayant en vue de faciliter la propagation universelle du système métrique, s'est réunie à Paris, en 1870, pour transformer l'étalon légal à bouts en un étalon à traits. Aucun de ses membres étrangers n'a eu l'idée de saisir cette occasion pour ajouter $0^{mm},19$ à l'étalon actuel. La Commission se borne à le copier le plus exactement possible, c'est-à-dire à donner au nouvel étalon à traits, qui deviendra le prototype de toutes les mesures, la longueur exacte de l'étalon à bouts conservé dans nos Archives.

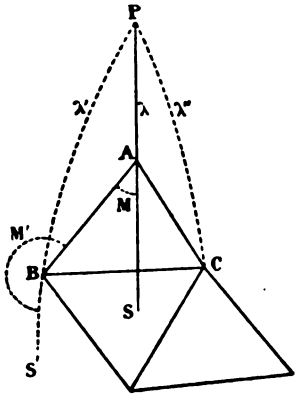
Ce qu'il y avait de plus juste et de plus élevé dans l'idée de la grande Commission de 1795, lorsqu'elle a voulu rattacher son unité fondamentale aux dimensions de la Terre, c'était d'ôter au système métrique tout caractère d'une nationalité particulière, et de le rendre ainsi admissible pour toutes les nations. Aujourd'hui ce système est légalement obligatoire en Italie, en Suisse, en Hollande, en Belgique, en Danemark, en Suède, etc. Il vient d'être imposé légalement en Allemagne; l'usage en est autorisé par la loi en Angleterre et aux États-Unis. Les hommes de science de toutes les nations l'emploient presque exclusivement dans leurs travaux. L'Association géodésique internationale vient elle-même d'adopter, pour étalon des mesures géodésiques, une règle de platine de 4^m semblable à celles de Borda.

CHAPITRE XXI.

COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES. ARCS DE PARALLÈLE.

On a déterminé astronomiquement, au point de départ A d'une triangulation, la colatitude λ et l'azimut SAB = M de l'un des côtés AB, c'est-à-dire l'azimut du sommet B sur l'horizon du point A. D'ailleurs, tous les angles de la triangulation ont été mesurés et tous les côtés ont été calculés en mètres. Dès lors il est facile de

Fig. 93.



déterminer de proche en proche les coordonnées géographiques de tous les sommets B, C, D, . . ., c'est-à-dire leurs colatitudes et leurs longitudes comptées à partir du méridien initial du point A.

Reprenons pour cela notre première hypothèse d'une Terre sphérique, quitte à montrer plus tard comment on devra modifier les résultats pour les adapter à l'ellipsoïde. Soient, sur cette sphère, P le pôle, PAS le méridien du point A, PBS celui du point voisin B. Dans le triangle sphérique PAB nous connaissons deux côtés PA $= \lambda$, AB $= \frac{c}{r}$ (c étant le côté en mètres du triangle géodésique

ABC), et l'angle compris PAB $= 180^\circ - M$. On en déduira donc les trois autres éléments, à savoir

PB $= \lambda'$, colatitude du second sommet B,

P ou APB, longitude du point B,

S'BA $= M' = 180^\circ -$ PBA, azimut de A sur l'horizon de B [1].

Les formules sont, en désignant par A et B les angles du triangle PAB,

$$(1) \qquad \cos\lambda' = \cos\lambda \cos\frac{c}{r} + \sin\lambda \sin\frac{c}{r}\cos A,$$

$$(2) \qquad \sin P = \sin\frac{c}{r}\frac{\sin A}{\sin\lambda'},$$

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)}{\cos\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda)}\cot\tfrac{1}{2}P.$$

Le rapport $\frac{c}{r}$ étant très petit ($\frac{1}{160}$ environ), on en profite pour développer les formules en séries. Ainsi, par un développement identique à celui de la page 268, la formule (2) donne

$$P = \frac{c}{r}\frac{\sin A}{\sin\lambda'} - \frac{1}{6}\frac{c^3}{r^3}\frac{\sin A(\sin\lambda' + A)\sin(\lambda' - A)}{\sin^3\lambda'}.$$

Avant de calculer P, il faut obtenir λ'. Prenons la première équation et posons $\lambda' = \lambda + d$; le premier membre deviendra $\cos\lambda\cos d - \sin\lambda\sin d$. Développons en série les sinus et cosinus de $\frac{c}{r}$ et de d jusqu'aux termes du quatrième ordre exclusivement, et divisons les deux membres par $\cos\lambda$, nous aurons

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}d^2 - d\operatorname{tang}\lambda + \tfrac{1}{6}d^3\operatorname{tang}\lambda \\ &\quad = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + \frac{c}{r}\operatorname{tang}\lambda\cos A - \frac{1}{6}\frac{c^3}{r^3}\operatorname{tang}\lambda\cos A; \end{aligned}\right.$$

si l'on s'en tenait au premier ordre, on aurait

$$(5) \qquad d = -\frac{c}{r}\cos A.$$

---

[1] Nous continuons, en Géodésie, à compter les azimuts comme les astronomes, à partir de la portion sud du méridien, de 0° à 360°, dans le sens rétrograde S.-O.-N.-E.

Pour tenir compte des termes du deuxième ordre, on remplacera $\frac{1}{2}d^2$ par $\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}\cos^2 A$, ce qui donne, après avoir divisé par $\tang\lambda$,

$$(6) \qquad -d = -\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}\frac{\sin^2 A}{\tang\lambda} + \frac{c}{r}\cos A.$$

Pour aller jusqu'au troisième ordre, il faut remplacer, dans le premier membre de (4), $\frac{1}{2}d^2$ par sa valeur tirée de (6), en excluant les termes d'ordre supérieur au troisième, c'est-à-dire par

$$\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}\cos^2 A - \frac{1}{2}\frac{c^3}{r^3}\frac{\sin^2 A\cos A}{\tang\lambda},$$

et mettre pour $\frac{1}{6}d^3$ sa valeur approchée $\frac{1}{6}\frac{c^3}{r^3}\cos^3 A$. On a ainsi finalement, après réduction des termes et division par $\tang\lambda$,

$$d = -\frac{c}{r}\cos A - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}\frac{\sin^2 A}{\tang\lambda} + \frac{1}{6}\frac{c^3}{r^3}\sin^2 A\cos A\left(1 + \frac{3}{\tang^2\lambda}\right).$$

Comme $\frac{c}{r}$ est ici exprimé en parties du rayon, on multipliera le deuxième membre par 206 265″ pour avoir d ou $\lambda' - \lambda$ en secondes.

Nous avons vu plus haut la manière de développer en série l'angle P déduit de l'analogie (2).

Enfin, l'angle $\frac{1}{2}(A + B)$ devient, en y introduisant les azimuts réciproques M et M′,

$$\tfrac{1}{2}(180^\circ - M + M' - 180^\circ) = \tfrac{1}{2}(M' - M).$$

M′ — M ne diffère de 180° que d'un petit angle auquel les topographes ont donné le nom de *convergence des méridiens*. Rien de plus simple que de le développer en série; nous ne nous y arrêterons pas.

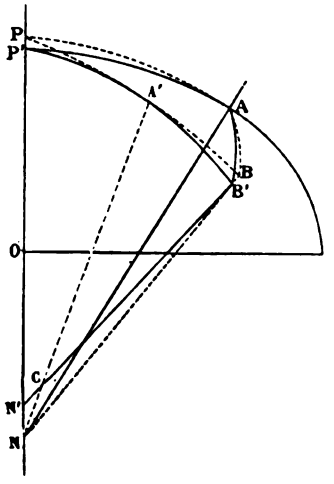
Nous connaissons maintenant, pour le point B, les coordonnées P et λ' ainsi que M′, azimut de A sur l'horizon de B. En ajoutant à ce dernier l'angle ABC du triangle géodésique, on aura l'azimut M′ de C sur l'horizon de B. On se retrouve donc en B dans les mêmes conditions qu'on avait en A, et l'on déterminera les coordonnées du sommet C par des calculs identiques aux précédents.

Réduction à l'ellipsoïde.

Si nous passons à l'ellipsoïde, nous trouvons sur cette surface, au lieu de PAB, un triangle P′AB′ formé de deux grands arcs d'ellipse méridienne P′A, P′B′ et du petit côté géodésique AB′. Les verticales en P ou en P′, et en A, sont communes aux deux triangles; elles se rencontrent au pied N de la grande normale en A; mais la verticale en B′ va couper l'axe un peu plus haut, en N′.

Le triangle sphérique PAB que nous lui substituons est donc si-

Fig. 91.



tué sur une sphère ayant son centre en N et pour rayon la grande normale en A ou AN. Cette sphère est osculatrice à l'ellipsoïde en un seul sens, transversalement au méridien en A; et il en est de même sur tous les points du parallèle AA′, c'est-à-dire en A′ aussi bien qu'en A.

Il serait impossible d'appliquer sur cette sphère le grand triangle ellipsoïdal P′AB′, car les arcs d'ellipse P′A, P′B′ sont loin d'être égaux aux arcs PA, PB. Néanmoins ces deux triangles ont des parties communes. Ainsi les angles dièdres en P et en P′ sont égaux; par suite, l'angle P que nous venons de déterminer sur la sphère n'a besoin d'aucune correction pour passer sur l'ellipsoïde. Il en

est de même de l'angle en A, c'est-à-dire de l'azimut du point B ou B'. Nous verrons tout à l'heure que BB' est négligeable, en sorte que les angles dièdres en B et B' ne diffèrent pas sensiblement. La seule différence entre ces triangles vient de ce que le point B' n'a pas rigoureusement la même colatitude que B.

La différence est l'angle α de la vraie normale B'N' avec le rayon BN de la sphère.

A la colatitude λ', que nous avons trouvée pour B, il faudra ajouter α pour avoir la colatitude du vrai sommet B'.

Le triangle B'CN, dans lequel CB' se confond avec le rayon de courbure R calculé pour le point dont la colatitude est $\frac{\lambda+\lambda'}{2}$, et où $CN = N - R$, nous donne

$$R \sin\alpha = (N - R)\sin(\lambda' - \lambda),$$
$$R\cos\alpha = N - z - (N - R)\cos(\lambda' - \lambda).$$

Par la première équation on a

$$\alpha = \frac{N - R}{R}(\lambda' - \lambda),$$

ou, à très peu près,

$$\alpha = \frac{e^2}{1 - e^2}\sin^2\lambda(\lambda' - \lambda).$$

La seconde relation donne

$$z = 2(N - R)\sin^2\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda) = 2Ne^2\sin^2\lambda\sin^2\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda).$$

En France, sur le parallèle moyen, ce petit écart, pour $\lambda' - \lambda = 20$, se réduit à quelques centimètres.

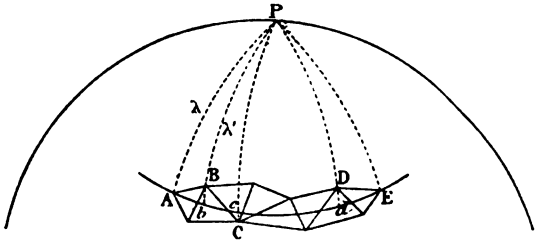
e^2	7,835 — 10	log N.....	0,001
C'log$(1 - e^2)$...	0,003	log e^2.....	7,835 — 10
$\sin^2\lambda$	9,698 — 10	$\sin^2 10'$.....	4,927 — 10
$\lambda' - \lambda = 1200''$..	3,079		1,763 — 10
log α.....	0,615	log a.....	6,805
α.....	4",12	log z.....	8,568 — 10
		z.....	0m,037

Ainsi le sommet B du triangle sphérique PAB est à 0m,037 au-dessus de la surface de l'ellipsoïde, et l'angle α qu'il faut ajouter au λ' sphérique est de 4",12.

Arcs de parallèle.

Au lieu de mesurer géodésiquement un arc de méridien, on peut mesurer un arc de parallèle terrestre, tel que AE, situé à la colatitude PA ou PE $= \lambda$. La marche est la même. On enveloppe l'arc d'une série de triangles dont on mesure les angles et dont on calcule les côtés AB, BC, CD, ... à l'aide d'une base. Puis on projette ces côtés sur l'arc de parallèle, qui se trouve ainsi décomposé en segments Ab, bc, cd, dE, dont la somme forme l'arc AE. Pour cela, il faut encore ici déterminer astronomiquement en A la cola-

Fig. 95.



titude PA $= \lambda$ et l'azimut $180^\circ +$ PAB du premier côté. Le triangle PAB, sur la sphère osculatrice le long du parallèle, donne PB $= \lambda'$, et l'on a l'angle dièdre P par l'analogie

$$\frac{\sin P}{\sin AB} = \frac{\sin A}{\sin \lambda'},$$

qu'on remplacera par le développement donné plus haut; et comme Ab $=$ PN $\sin\lambda$, N étant la grande normale en A, il suffira de multiplier l'expression de P par N $\sin\lambda$; on aura donc, pour le premier segment du parallèle,

$$Ab = AB\frac{\sin A}{\sin\lambda'}\sin\lambda - \frac{1}{6}\frac{AB^2}{N^2}\frac{\sin A\sin(\lambda'+A)\sin(\lambda'-A)}{\sin^3\lambda'}\sin\lambda,$$

d'où l'on voit que N ne sert ici qu'à calculer un terme extrêmement petit, et qu'on n'a besoin que d'une valeur grossièrement approchée de cet élément.

Après avoir calculé tous les segments de cette manière, on en fait la somme pour avoir AE.

Si d'autre part on a mesuré *astronomiquement* la différence APE de longitude des stations extrêmes A et E, en comparant, par le télégraphe, deux pendules bien réglées en ces deux stations, on aura L′ — L par la différence des heures que ces pendules marquent au même instant. Cela posé, si l'on désigne par e^2 et a les éléments de l'ellipsoïde terrestre, la relation

$$AE = \frac{L' - L}{206\,265} \frac{a \sin\lambda}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\lambda}},$$

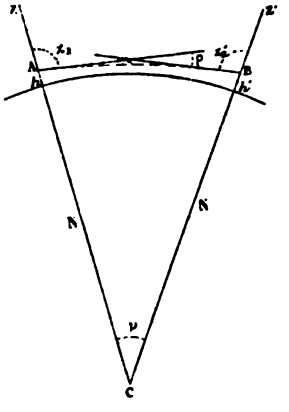
dans laquelle AE est donné, comme on vient de le voir, par une triangulation, est une équation nouvelle entre a et e^2; elle pourra concourir, avec celles qu'on tire de la mesure d'arcs de méridien, à la détermination de ces inconnues.

CHAPITRE XXII.

NIVELLEMENT GÉODÉSIQUE.

On détermine le relief du sol par les cotes d'altitude de ses différents points, comptées à partir de la surface de l'ellipsoïde terrestre; celle-ci se confond avec la surface d'équilibre des mers, prolongée idéalement au-dessous des continents, du moins quand on fait abstraction des irrégularités locales.

Fig. 96.



A et B sont deux stations géodésiques situées aux altitudes h et h' au-dessus de l'ellipsoïde terrestre. L'arc compris entre les projections de ces points sur l'ellipsoïde est un côté de la triangulation; sa longueur en mètres est donc parfaitement connue. Soient a cette longueur, N le rayon de la sphère osculatrice locale dont le centre est en C, v l'angle au centre exprimé par $\frac{a}{N}$ en parties du rayon. Supposons que deux observateurs, placés en A et B, aient mesuré *simultanément* les distances zénithales réciproques z_1, z'_1.

Le rayon de lumière allant de B en A est légèrement courbé par la réfraction atmosphérique, en sorte que le signal B est vu suivant la tangente en A à cette trajectoire. En désignant par ρ l'angle des tangentes extrêmes, le quadrilatère formé par ces deux tangentes et par les deux normales donne

$$(1) \qquad z_1 + z'_1 + \rho = 180^\circ + \nu.$$

Ainsi l'opération susdite fait connaître immédiatement la réfraction géodésique ρ, indépendamment de toute théorie. La courbure de la trajectoire lumineuse étant très faible et son amplitude ν ne dépassant guère $\frac{40\,000^m}{6\,400\,000^m} = \frac{1}{160} = 20'$, il sera permis de confondre cette courbe avec une portion de son cercle osculateur dont le rayon est d'environ 8N. Dès lors les petits angles formés, en A et B, par les tangentes à cet arc avec la corde AB, sont égaux à $\frac{1}{2}\rho$. Ces angles constituent la réfraction en A et en B; par conséquent les distances zénithales vraies ZAB, Z'BA sont données par

$$z_1 + \tfrac{1}{2}\rho, \quad z'_1 + \tfrac{1}{2}\rho.$$

Dans le triangle ACB on a

$$\frac{\sin(z_1 + \frac{1}{2}\rho)}{\sin(z'_1 + \frac{1}{2}\rho)} = \frac{N + h'}{N + h},$$

d'où, en tenant compte de la relation (1),

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(z_1 - z'_1)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(180^\circ + \nu)} = \frac{h' - h}{2N + h + h'},$$

ce qui peut s'écrire

$$(2) \qquad -2N \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(z_1 - z'_1) \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\nu = h' - h.$$

On obtient ainsi la différence de niveau des deux stations par un calcul indépendant de la réfraction géodésique ρ.

On a trouvé par des nivellements de ce genre, exécutés sur une grande échelle dans toutes les parties du monde, et au moyen de la relation (1), que la réfraction géodésique ρ est toujours égale à la même fraction $\frac{1}{8}$ de l'angle au centre ν, quelles que soient la température et la pression. La théorie conduit précisément au même

résultat. En effet, l'équation différentielle de la réfraction étant, page 115,

$$d\rho = -\frac{dl}{l}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I},$$

remplaçons tang I par $\frac{r\,dv}{dr}$ et $\frac{dl}{l}$ par sa valeur déduite de la loi supposée de l'atmosphère [1],

$$rl^m = \text{const.},$$

qui donne

$$\frac{dr}{r} + m\frac{dl}{l} = 0;$$

il viendra

$$d\rho = \frac{dv}{m},$$

et, en intégrant (la constante est nulle),

$$\rho = \frac{v}{m}.$$

Nous avons vu effectivement, dans la théorie de la réfraction astronomique, que $m = 8$.

L'exposant m est donc aussi la constante de la réfraction géodésique.

D'après cela, une seule observation de distance zénithale z_1 suffirait pour obtenir $h - h'$. La réfraction $\frac{1}{2}\rho$ étant connue, on aurait, pour la distance zénithale vraie, $z_1 + \frac{1}{2}\rho = z_1 + \frac{v}{2m}$, et le triangle précédent donnerait pour la seconde, non observée,

$$z_1 + \tfrac{1}{2}\rho - v = z_1 - \frac{2m-1}{2m}v.$$

Dès lors la proportion

$$\frac{\sin\left(z_1 + \frac{v}{2m}\right)}{\sin\left(z_1 - \frac{2m-1}{2m}v\right)} = \frac{N + h'}{N + h}$$

---

[1] Toutes les lois admises pour le calcul de la réfraction astronomique conduisent au même résultat, non plus rigoureusement, mais approximativement.

devient

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}v}{\operatorname{tang}\left(z_1 - \frac{m-1}{2m}v\right)} = \frac{h'-h}{2N}.$$

Variations diurnes du coefficient m.

En réalité, la réfraction géodésique n'est constante que pour les heures moyennes du jour, de 8^h du matin à 4^h de l'après-midi. Le soir elle croît de plus en plus à partir de 4^h et atteint son maximum dans la nuit. De même le matin, vers 6^h, elle atteint un second maximum. Ces phénomènes sont bien connus des géodésiens qui en profitent parfois pour voir des signaux trop peu élevés au-dessus du sol. Ils ne sont pas réciproquement visibles pendant le jour, mais le soir, la réfraction allant en croissant, il arrive un moment où le signal B s'élève au-dessus de l'horizon du point A et devient visible en cette station. Cela prouve que les astronomes ne sont pas fondés à assigner une loi invariable à la constitution de l'atmosphère, supposition qui n'a d'ailleurs d'inconvénient que pour le calcul des observations faites à plus de 80° du zénith. Mais ces faits montrent aussi que les nivellements géodésiques doivent être exécutés par des distances zénithales *réciproques* et *simultanées*, si l'on veut éviter l'incertitude des réfractions géodésiques.

Précision du nivellement géodésique comparée à celle du nivellement ordinaire.

La formule (2) peut s'écrire ainsi

$$a\frac{\frac{1}{2}(z'_1 - z_1)}{206\,265} = h' - h,$$

d'où, en différentiant,

$$a\frac{d\frac{1}{2}(z'_1 - z_1)}{206\,265''} = d(h' - h).$$

Si l'erreur probable de z_1 et de z'_1 est de $1''$, celle de $z'_1 - z_1$ sera $1''\sqrt{2}$; en faisant $a = 40\,000^m$, on aura sensiblement

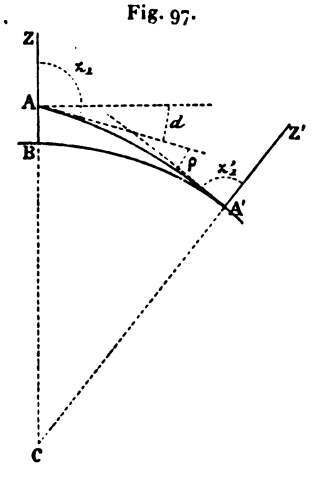
$$d(h' - h) = \pm\frac{0^m,7}{5} = \pm 0^m,14.$$

D'autre part, l'erreur probable d'un nivellement à petites portées, exécuté par les méthodes de M. Bourdaloue, dont on se sert aujourd'hui en tous pays, n'est que de $\pm 1^{mm}$ par kilomètre ou de $\pm 1^{mm} \times \sqrt{40} = 6^{mm},3$ pour la longueur d'un côté géodésique de 40^{km}. La précision de ce dernier est donc vingt fois plus grande; aussi a-t-on renoncé désormais aux grands nivellements géodésiques pour les remplacer par le nivellement à très petites portées des Ponts et Chaussées, bien que celui-ci soit beaucoup plus lent et plus coûteux. Les cotes d'altitude de la Carte de France sont dues néanmoins à l'application du premier système.

Altitude absolue d'une station; dépression de l'horizon de la mer.

Les nivellements doivent être poussés jusqu'à la mer, si l'on veut en conclure les altitudes absolues. Supposons que, de la dernière

Fig. 97.



station A (*fig.* 97), on ait mesuré la distance zénithale z_1 de l'horizon de la mer. La trajectoire lumineuse AB sera tangente en B à la surface de la mer et l'on aura $z'_1 = 90°$. Dès lors l'équation (1) devient

$$2N \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (z_1 - 90°) = h;$$

mais cette formule ne saurait être utilisée parce qu'ici v est inconnu.

Il faut avoir recours à l'équation générale de la trajectoire lumineuse, page 112,

$$rl \sin I = r_1 l_1 \sin z_1,$$

qui devient ici

$$rl \sin z_1 = r_1 l_1.$$

Éliminons l entre cette relation et la suivante

$$r^{\frac{1}{m}} l = r_1^{\frac{1}{m}} l_1;$$

on aura

$$\sin z_1 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^{1-\frac{1}{m}}.$$

Remplaçons z_1 par $90^\circ + d$, d désignant la dépression, r par N et r_1 par $N + h$, il viendra, en développant en série,

$$1 - \tfrac{1}{2} d^2 \ldots = 1 - \frac{m-1}{m} \frac{h}{N} \ldots,$$

d'où, à très peu près,

$$d = \sqrt{\frac{2h}{N} \frac{m-1}{m}},$$

formule où l'on fera $m = 8$. Elle donnera h si l'on a mesuré d ou z_1, et, inversement, elle donnera d si h est connu.

La dépression ainsi calculée pour les marins ne compte en toute rigueur que pour les heures moyennes de la journée. Dans certains cas exceptionnels (mirage), elle peut prendre des valeurs très différentes et même devenir momentanément négative.

Description astronomique d'un grand pays.

Dans les pays d'une vaste étendue et d'une population très inégalement répartie, comme la Russie, on procède géodésiquement dans les contrées importantes; pour les autres, on se contente de déterminer astronomiquement les longitudes et les colatitudes des points essentiels. La figure de notre globe étant désormais assez bien connue, il est aisé de placer ces points sur une Carte de grande étendue et de s'en servir comme de points de repère pour la topographie locale. Celle-ci s'appuiera donc, non sur des triangles, comme dans les contrées géodésiques, mais sur un

certain nombre de points de repère dont la distance et les azimuts respectifs pourront être calculés avec une grande exactitude.

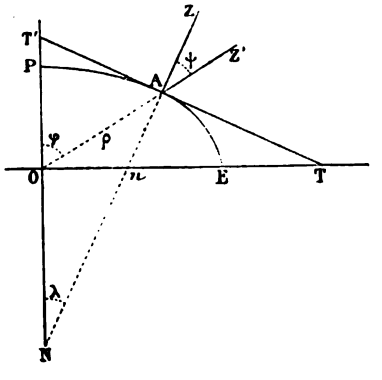
Cette méthode des coordonnées astronomiques est à recommander aux officiers qui parcourent des pays mal connus et qui tiennent à rapporter des éléments sérieux de ces pays. Pour cela, il suffit d'un sextant et d'une bonne montre, et de déterminer astronomiquement les points essentiels de l'itinéraire suivi. L'emploi de la boussole et les distances évaluées par journées de marche, etc., ainsi que des azimuts de cimes remarquables, relevés de différentes stations, permettent de compléter le canevas. C'est ainsi que M. d'Abbadie est parvenu, à lui seul, à faire une Carte excellente de l'Abyssinie.

Calcul des éléments locaux de l'ellipsoïde terrestre : grande normale, distance au centre de la Terre, colatitude géodésique, etc.

Si l'on prend, pour coordonnées d'un point A donné par sa colatitude astronomique λ, les variables φ et ρ qui se rapportent au centre, on a, pour formules de transformation,

$$x = N \sin\lambda = \rho \sin\varphi,$$
$$y = N(1 - e^2) \cos\lambda = \rho \cos\varphi.$$

Fig. 98.



d'où l'on tire ρ et φ, N étant $\dfrac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\lambda}}$.

On peut aussi en déduire

$$N e^2 \sin\lambda \cos\lambda = \rho \sin(\varphi - \lambda),$$

$$N - N e^2 \cos^2\lambda = \frac{a^2}{N} = \rho \cos(\varphi - \lambda),$$

expressions où l'on fait

$$a = 6378284^{mm}, \quad e^2 = 0{,}0067853.$$

Par exemple, à l'Observatoire de Paris, où

$$\lambda = 41^\circ 9' 47'',$$

on trouverait

$$\varphi - \lambda = 11' 41'',77,$$

d'où

$$\varphi = 41^\circ 21' 28'',77,$$

et

$$\log\rho = 6{,}8038705.$$

Résumé des formules pour l'ellipsoïde terrestre.

Grande normale AN.....	$N = a(1 - e^2 \cos^2\lambda)^{\frac{1}{2}}$
Rayon de courbure de l'ellipse méridienne.	$R = \frac{N^3}{a^2}(1 - e^2)$
Rayon de courbure dans l'azimut A.....	$N\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \sin^2\lambda \cos^2 A\right)^{\frac{1}{2}}$
Petite normale An.....	$N(1 - e^2)$
Rayon du parallèle.....	$x = N \sin\lambda$
Ordonnée.....	$y = N(1 - e^2)\cos\lambda$
Distance du point A au centre.....	$\rho = a^2 N^{-1} \sec(\varphi - \lambda)$
Relation entre φ et λ.....	$\tang\varphi = \frac{1}{1 - e^2} \tang\lambda$
Tangente AT'.....	$N \tang\lambda$
Tangente AT.....	$N(1 - e^2)\cot\lambda$
Sous-tangente.....	$N(1 - e^2)\cos\lambda \cot\lambda$
Sous-normale.....	$N(1 - e^2)\sin\lambda$
On.....	$N e^2 \sin\lambda$
ON.....	$N e^2 \cos\lambda$
Nn.....	$N e^2$
Distance du centre à la tangente.....	$\rho\cos(\varphi - \lambda) = N - N e^2 \cos^2\lambda = \frac{a^2}{N}$

CHAPITRE XXIII.

INTENSITÉ DE LA PESANTEUR EN UN LIEU DONNÉ.

La constante g de la pesanteur, en un lieu donné, est liée à la longueur l d'un pendule dont l'oscillation infiniment petite a pour durée t, dans le vide, par la relation

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Si l'on prend pour unité la seconde sexagésimale de temps moyen, on a, en désignant encore par l la longueur du pendule qui bat cette seconde,

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{d'où} \quad g = \pi^2 l.$$

Il suffit donc de mesurer en un lieu donné la longueur de ce pendule, pour obtenir immédiatement la constante locale de la pesanteur.

La formule de Clairaut (p. 204) donne, pour la colatitude λ au niveau de la mer,

$$(1) \qquad l = l' + \left(\frac{5}{2}q - \mu\right) l' \cos^2\lambda,$$

l' étant la longueur du pendule à l'équateur. En multipliant les deux membres par π^2, on a

$$(2) \qquad g = g' + \left(\frac{5}{2}q - \mu\right) g' \cos^2\lambda,$$

g' ou $\pi^2 l'$ étant la pesanteur équatoriale. On verra un peu plus loin que $q = \frac{1}{288,36}$; nous venons de trouver $\mu = \frac{1}{291,9}$; il suffit donc d'une détermination de l ou de g en un lieu quelconque pour obtenir la constante g'.

Il serait naturel de prendre pour cela les mesures du pendule que l'on a effectuées dans les régions équatoriales; mais elles sont d'ancienne date et n'ont pas été faites avec toute la précision requise aujourd'hui. Voici des observations toutes récentes dues à M. Peirce; elles ne laissent rien à désirer. On en a déduit l' par

$$l = l' + [0,71571] \cos^2 \lambda,$$

en ayant soin de supprimer, comme il a été dit plus haut (p. 307), la correction relative à l'attraction des continents :

	λ.	h.	l observée.	l réduite au niveau de la mer.	l' conclue.
	° ′	m	mm	mm	mm
Paris.....	41.10	72	993,92	993,94	990,99
Berlin.....	37.30	34	994,24	994,25	990,98
Kiew.....	33.33	»	994,18	994,18	991,09
Genève.....	43.42	407	993,56	993,69	990,97
New-York...	49.15	10	993,21	993,21	991,00
				Moyenne.....	991,006

A titre de vérification, nous rapporterons les valeurs de l' déduites de la même manière des valeurs de l observées sur les continents, près de l'équateur :

	λ.	l'.
	° ′	mm
Lac de l'Inca.....	90.14	990,94
Quito.....	90.14	991,01
Para.....	91.27	991,00
Maranham.....	92.32	990,97
	Moyenne...	990,98 (1)

(1) Les observations faites dans les îles équatoriales donnent, comme nous l'avons vu pour toutes les îles, des résultats trop forts :

	λ.	l'.
	° ′	mm
Iles Gallapagos.....	89.28	991,09
Ile Saint-Thomas.....	89.35	991,19
Ile Gaunsah-Lout.....	89.58	991,12
Ile Rawak.....	90. 2	991,13

L'observation est bien faite à la surface de la mer, mais on a opéré au sommet d'une île plus dense que l'eau; il faudrait en défalquer l'attraction de la masse excédante de l'île par rapport à l'eau qu'elle remplace. Les éléments d'une telle correction manquent.

Nous prendrons $l = 991^{mm},00$ en évaluant l'incertitude à $\frac{1}{100}$ ou $\frac{2}{100}$ de millimètre. La formule (2) devient alors

$$(3) \qquad g = 9^{m},7807 + 0^{m},05129 \cos^2\lambda,$$

avec une incertitude de 1 ou 2 unités du dernier ordre.

A Paris, pour les questions de Mécanique ordinaire où intervient le nombre g, on prendra $0^{m},99394 \times \pi^2$ ou

$$g = 9^{m},8098;$$

l'incertitude ne dépasse pas 1 unité du dernier ordre. Le nombre adopté ordinairement est $9^{m},80896$; l'erreur est de près de $0^{m},001$.

Attraction de la Terre sur un point extérieur.

On a besoin, en Astronomie, de connaître, non plus g, mais l'attraction de la Terre sur un point extérieur.

La pesanteur, en un lieu donné, est la résultante de l'attraction du globe et de la force centrifuge née de la rotation diurne. En un lieu dont les coordonnées, dans le plan du méridien, sont N et λ ou x et y, la composante verticale de cette force est

$$\frac{4\pi^2}{T^2} x \sin\lambda,$$

T étant la durée de la rotation, et comme

$$x = N \sin\lambda = \frac{a \sin\lambda}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\lambda}},$$

on aura, pour l'attraction du globe (pesanteur + composante de la force centrifuge) au point considéré,

$$g + \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{a \sin^2\lambda}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2\lambda}},$$

g étant calculé par la formule (3).

On démontre, en Mécanique, que l'attraction du globe sur un point extérieur répond à celle qu'il exerce sur un point de la surface dont la colatitude a pour cosinus carré $\frac{1}{3}$. Faisons donc, dans la formule (4),

$$\cos^2\lambda = \tfrac{1}{3}, \quad \sin^2\lambda = \tfrac{2}{3}, \quad e^2 = 0,0068395,$$

nous aurons, pour cette attraction,

$$9^{m},8204.$$

Le carré du rayon terrestre correspondant est

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 \frac{\sin^2\lambda + (1-e^2)^2\cos^2\lambda}{1 - e^2\cos^2\lambda}.$$

Cette formule donne, pour $\cos^2\lambda = \frac{1}{3}$,

$$\frac{\rho^2}{a^2} = 0,99773.$$

L'attraction du globe terrestre variant en raison inverse du carré de la distance, on aura, à la distance quelconque D,

$$9^{m},8204\,\frac{\rho^2}{D^2} = 9^{m},7981\,\frac{a^2}{D^2}.$$

Telle est la constante que nous adopterons dans la suite. Quant à la force centrifuge équatoriale $\frac{4\pi^2}{T^2}a$ et au rapport q de cette force à la pesanteur équatoriale qui figure dans la formule de Clairaut, en voici le calcul; la vitesse de rotation de la Terre est de 1 tour par 86 400ˢ sidérales ou par 86 164ˢ de temps moyen :

log 4	0,60206
log π^2	0,99430
log a	6,80471
C^t log T^2	0,12935 — 10
log force centrif. équat....	8,53042 — 10
log pesant. équat	0,99037
log q	7.54005 — 10
C^t	2,45994

$$q = \frac{1}{288,36}.$$

LIVRE CINQUIÈME.

GÉOGRAPHIE.

La Géographie mathématique se compose de deux parties : l'une, qui dépend de l'Astronomie, a pour but de déterminer, dans tous les points importants du globe, les coordonnées terrestres de colatitude et de longitude, ainsi que l'orientation, afin de rattacher à des bases certaines les renseignements de toute provenance qu'elle utilise pour la description du globe ; l'autre, qui dépend de la Géométrie pure, a pour but de reporter sur des Cartes générales ou partielles la configuration des pays, des continents et des mers.

La première partie a déjà été traitée amplement dans le cours de ce Volume ; elle sera complétée dans le second à l'occasion de la navigation astronomique. Nous exposerons ici rapidement la seconde.

La sphère n'est pas une surface développable ; on ne peut donc la représenter en tout ou en partie sur un plan qu'en lui faisant subir quelque déformation. Il y a une infinité de systèmes de Cartes ; tous ont leurs déformations particulières : les uns altèrent les longueurs et conservent les angles ; les autres altèrent les angles et les longueurs et conservent les surfaces, etc. Nous allons passer en revue les principaux systèmes de Cartes par projection ou par développement, en insistant sur les déformations qui leur sont propres. Disons seulement, au point de vue historique, que les projections sont dues à Hipparque, et que les premières Cartes par développement viennent de Ptolémée.

CHAPITRE XXIV.

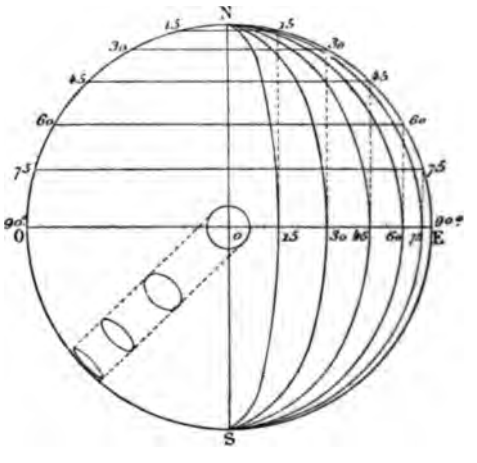
CARTES PAR PROJECTION.

Projection orthographique.

C'est la projection ordinaire d'un hémisphère sur le grand cercle qui lui sert de base. Prenons pour base le plan d'un méridien, comme dans la figure ci-dessous. Les autres méridiens seront représentés par des ellipses ayant pour axe commun la ligne NS, c'est-à-dire la ligne des pôles. Les parallèles de la sphère seront représentés par des droites perpendiculaires à cet axe.

Construction du canevas. — Rabattons le demi-cercle équatorial OE sur le plan de la Carte en ONE, et divisons-le de 15° en 15°

Fig. 99.



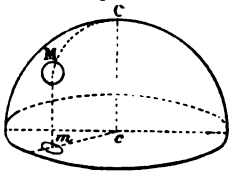
à partir du point N. Par les points de division, menons des perpendiculaires sur OE; nous aurons ainsi la graduation de l'équa-

teur en longitude, et en même temps celle du cercle méridien NES en colatitude. Par les points de division de l'équateur, faisons passer des ellipses ayant pour grand axe commun NS; par ceux du méridien NE, menons des parallèles à OE. Nous aurons la représentation d'un réseau de méridiens et de parallèles de la sphère distribués de 15° en 15°.

Cette projection est usitée en Astronomie pour représenter les astres à diamètre sensible, tels que le Soleil, la Lune, les planètes. C'est en effet à très peu près sous la forme d'une telle projection que nous les voyons.

Déformation. — Elle est nulle au centre et très faible près

Fig. 100.

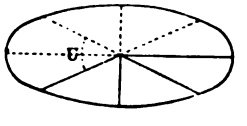


du centre, mais elle croît rapidement sur les bords. Rapportons les points de la sphère par leurs distances z au point C qui se projette sur le centre c de la Carte.

Un point M, dont la distance sphérique est z, aura sur la Carte, pour distance au centre c, $\sin z$. Si la première augmente de la quantité constante dz, la seconde augmentera de $d \sin z = \cos z\, dz$. Un petit cercle de la sphère, décrit autour de M avec le rayon dz, deviendra sur la Carte une ellipse dont les demi-axes seront dz et $\cos z\, dz$, et, sur les bords, une simple ligne droite égale à $2\, dz$.

L'altération des longueurs autour de M sera donc nulle dans la direction perpendiculaire à cm, et proportionnelle à $\cos z$ dans la direction cm. L'angle de ces deux directions reproduit exactement

Fig. 101.



celui de la sphère; mais toutes les autres directions autour du point M se trouvent altérées sur la Carte. Le maximum de déformation

des angles a lieu pour le système de diamètres rectangulaires du cercle qui se projette sur les diamètres conjugués égaux de l'ellipse m. Soient x leur demi-longueur et U leur angle. On aura, par les théorèmes d'Apollonius,

$$dz \times dz \cos z = x^2 \sin U,$$
$$dz^2 + dz^2 \cos^2 z = 2x^2.$$

En divisant membre à membre, on en tire $\frac{1}{2}\sin U = \frac{\cos z}{1 + \cos^2 z}$. Soit, par exemple, $z = 60°$; alors $\cos z = \frac{1}{2}$. La formule donne $\sin U = \frac{4}{5}$, d'où $U = 53°$. Ainsi, si l'on voulait tracer dans cet endroit de la Carte une rose des vents, des directions telles que NO et NE, comprenant en réalité 90°, n'en comprendraient que 53 sur la Carte. Ces énormes déformations rendent ce système inapplicable à toute autre représentation que celle des astres à diamètre sensible. C'est ainsi que les cirques de la Lune, si parfaitement ronds quand on les voit dans la région centrale, apparaissent de plus en plus elliptiques à mesure qu'ils en sont plus éloignés, et que les taches du Soleil, rondes très souvent vers le centre, s'aplatissent vers les bords et s'y réduisent presque à une simple ligne droite.

Projection stéréographique.

Au lieu de projeter l'hémisphère sur le plan de sa base, prenons-en la perspective sur ce plan, l'œil étant placé en V à l'extrémité du diamètre perpendiculaire CV (*fig.* 102).

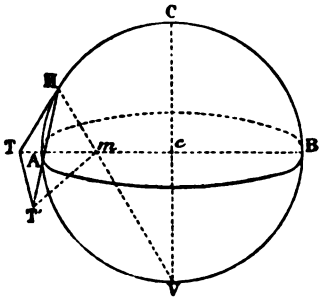
Les propriétés de cette projection tiennent à ce que tout rayon visuel VmM rencontrera la sphère et le plan du tableau sous le même angle. En effet, menons par ce rayon visuel et par le diamètre CV un plan qui coupera la sphère suivant le grand cercle de la figure. L'angle de la tangente TM avec MV aura pour mesure $\frac{AM}{2} + \frac{90°}{2}$. Il en sera de même de l'angle VmB.

D'après cela, si TT′ est l'intersection du plan tangent en M avec le plan du tableau, cette droite sera perpendiculaire au plan du triangle isoscèle TMm, et tous ses points seront également éloignés de M et de m. Si donc nous joignons un point quelconque T′ de

cette droite aux points M et m, l'égalité des triangles TT'M, TT'm entraînera celle des angles en M et en m.

Or, si deux courbes tracées sur la sphère et se croisant en M ont pour tangentes MT, MT', leurs projections auront pour tangentes

Fig. 102.



mT, mT'; celles-ci se croisent donc sous l'angle TmT' = TMT'. Ainsi, dans cette projection, les angles sont conservés.

Il en résulte qu'un cercle quelconque de la sphère aura pour projection stéréographique un cercle (¹). En effet, circonscrivons à la sphère un cône ayant ce cercle pour ligne de contact. Les génératrices seront partout normales à ce cercle. Mettons en perspective le cercle et les génératrices du cône. Puisque les angles sont conservés, les perspectives des génératrices, issues d'un même point, seront normales à la perspective du cercle, ce qui exige que cette perspective soit elle-même un cercle. Il faut remarquer que le centre de cette perspective est la perspective du sommet du cône circonscrit à la sphère, et non celle du centre ou du pôle de la courbe de contact (Chasles).

S'il s'agit d'un grand cercle de la sphère, le cône circonscrit dégénère en un cylindre dont les génératrices ont encore pour perspectives des droites qui divergent d'un point de fuite. On détermine ce point en menant par le point de vue V une parallèle à ces génératrices, et en cherchant l'intersection de cette parallèle avec le Tableau.

Canevas sur un méridien. — D'après cela, on construira de la

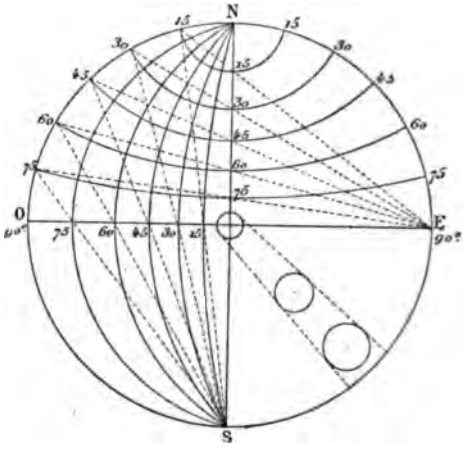
(¹) A moins que le plan de ce cercle ne passe par le point de vue; alors la projection se réduit à une droite.

manière suivante la projection stéréographique d'un hémisphère sur le plan d'un méridien.

Soient

NESO le cercle méridien servant de base à l'hémisphère qu'il s'agit de représenter sur le plan dudit cercle ;

Fig. 103.



NS la ligne des pôles et en même temps la projection du méridien central ;

EO l'équateur.

Le point de vue sera aux antipodes du centre de la Carte, sur l'équateur même. Pour graduer l'équateur, rabattons-le autour de EO, sur le demi-cercle ENO. Le point de vue se rabattra en S.

Divisons de 15° en 15° l'équateur rabattu, et joignons les points de division au point de vue en S. Les points de rencontre de ces droites avec la ligne OE donneront la perspective des divisions de l'équateur. Les méridiens passeront par ces points de division ainsi projetés, et, comme ils doivent aussi passer par N et S, on aura trois points de chacun d'eux.

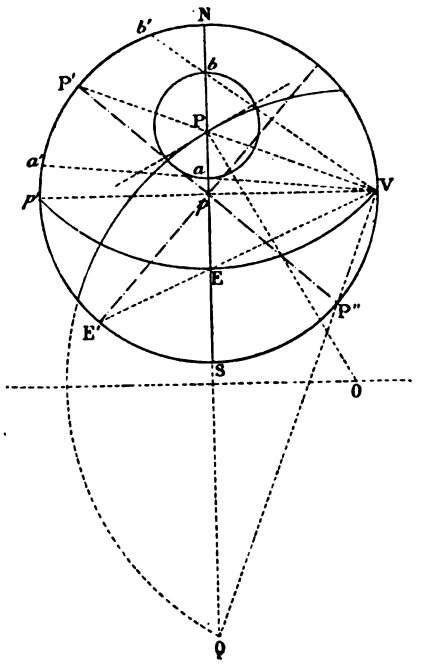
On opérera de même pour les parallèles qui coupent le méridien central SN en des points espacés de 15° en 15°. Rabattons à gauche ce méridien central ainsi divisé. Le point de vue se rabattra à droite, en E. On joindra ce point aux divisions de 15°, 30°, 45°, ..., et les points de rencontre de ces droites avec la droite

NS donneront les perspectives de la graduation du méridien central. La perspective du parallèle de 15°, par exemple, passera par les trois points marqués 15° sur la figure.

Ces parallèles couperont les méridiens à angle droit. Ceux-ci coupent, en N et S, le méridien central NS, suivant des angles égaux à leurs longitudes comptées à partir du méridien central.

Canevas stéréographique sur un plan diamétral parallèle à l'horizon d'un lieu donné, par exemple, sur celui de Paris, dont la colatitude est 41°10′. — Soit NS le diamètre du cercle parallèle à l'horizon de Paris. Ce sera aussi le méridien central de la Carte. Paris sera au centre p.

Fig. 104.



Le point de vue doit être pris au point opposé à p sur l'hémisphère inférieur. Rabattons ce méridien central sur la gauche, en Np'S, et le point de vue à droite, en V. Si l'on prend p'P′ = 41°10′, P′ sera le rabattement du pôle nord et P′P″ la ligne des pôles; nous aurons les perspectives de ces points à l'intersection des droites VP′, VP″

avec NS, l'une en P, l'autre en Q. P et Q seront donc les deux pôles sur la Carte.

Les méridiens sont des cercles qui se croiseront en P et Q sous les angles mêmes qu'ils font entre eux sur la sphère. Leurs centres seront sur une perpendiculaire au milieu de PQ. Pour construire le méridien de 60°, nous tracerons en P une droite faisant 60° avec PS; puis nous lui mènerons en P une perpendiculaire qui déterminera le centre en O. PO sera le rayon de ce méridien.

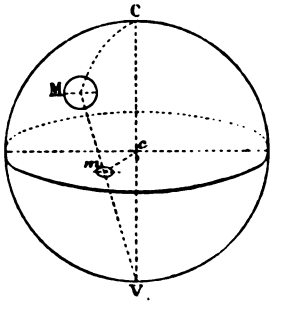
Les parallèles seront des cercles ou des portions de cercle; construisons, par exemple, le parallèle sur lequel $\lambda = 30°$. Pour cela prenons, sur le rabattement NP'S du méridien, deux arcs P'a', P'b' de 30°, et joignons a' et b' à V. Les points de rencontre avec NS détermineront ab, diamètre dudit parallèle.

Quant à l'équateur, menez pE' perpendiculairement à la ligne des pôles P'P''; pE' sera le rabattement de la trace de l'équateur sur le méridien central. Joignons E' et V; E sera la perspective d'un point de l'équateur. Sa trace sur le plan du Tableau est d'ailleurs p'V, et sa perspective sera le cercle passant par p', E et V.

Au lieu de construire géométriquement ces centres et ces rayons, il serait facile d'obtenir par le calcul tous les éléments d'un canevas stéréographique.

L'avantage de cette projection, cas particulier de la transformation d'une figure par rayons vecteurs réciproques, est de n'employer que des arcs de cercle pour le canevas et de reproduire fidèlement les angles; aussi s'en sert-on pour de petites mappemondes; mais les déformations linéaires et superficielles sont considérables.

Fig. 105.



Déformation. — Rapportons les points de la sphère au point C,

centre de l'hémisphère supérieur, par leurs distances z à ce point. Soient M un point de cet hémisphère et m sa perspective. L'angle mVC étant égal à $\frac{1}{2}z$, on aura, si le rayon cV est pris pour unité, $mc = \text{tang}\frac{1}{2}z$, V$m = \text{séc}\frac{1}{2}z$, VM projection de CV $= 2\cos\frac{1}{2}z$. Le point m étant déterminé par sa coordonnée $mc = \text{tang}\frac{1}{2}z$, si z varie de dz sur la sphère, la projection mc variera de

$$d\,\text{tang}\tfrac{1}{2}z = \tfrac{1}{2}dz\,\text{séc}^2\tfrac{1}{2}z.$$

Imaginons autour de M un cercle de rayon dz sur la sphère. Il aura pour projection stéréographique une section conique dont l'un des axes sera $\frac{1}{2}dz\,\text{séc}^2\frac{1}{2}z$. Pour avoir l'autre axe, menez dans le cercle M le diamètre parallèle au plan du Tableau. La projection de ce demi-diamètre dz, réduite dans le rapport de Vm à VM, c'est-à-dire de $\text{séc}\frac{1}{2}z$ à $2\cos\frac{1}{2}z$, sera donc $\frac{\frac{1}{2}dz}{\cos^2\frac{1}{2}z}$ comme pour le premier axe. La section conique est donc un cercle. Dès lors tout couple de diamètres rectangulaires pris dans le petit cercle de la sphère sera représenté par un couple de diamètres rectangulaires sur la projection. Les angles seront donc conservés, mais les dimensions linéaires sont réduites dans le rapport de 1 à $\frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}z}$. Au centre de la Carte, où $z = 0^\circ$, ce rapport est $\frac{1}{2}$; aux bords, où $z = 90^\circ$, il est égal à 1.

Ainsi la déformation porte sur les dimensions linéaires et superficielles. Bien que les angles soient conservés, les figures de grandeur finie tracées sur la sphère ne sont pas, en général, représentées par des figures semblables sur la projection, parce que, dans l'étendue de ces figures, le coefficient de déformation linéaire varie très sensiblement. Mais, comme on peut le considérer comme constant dans l'étendue des figures infiniment petites, celles-là sont représentées par des figures semblables, deux fois plus petites linéairement et quatre fois plus petites en superficie, au centre de la Carte, tandis qu'elles conservent la même grandeur linéaire et superficielle aux bords.

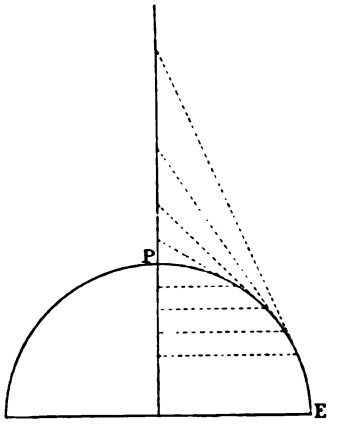
Nous omettons ici la projection centrale ou gnomonique; il en sera question dans le second Volume, à l'occasion des cadrans.

CHAPITRE XXV.

DÉVELOPPEMENTS.

Décomposons la sphère en une série de zones comprises entre des parallèles espacés de $d\lambda$ en $d\lambda$. Ces zones sont assimilables à des troncs de cône séparément développables. Chacun d'eux aura pour apothème la tangente de la colatitude correspondante. Si tous ces troncs de cône sont ouverts suivant un même méri-

Fig. 106.

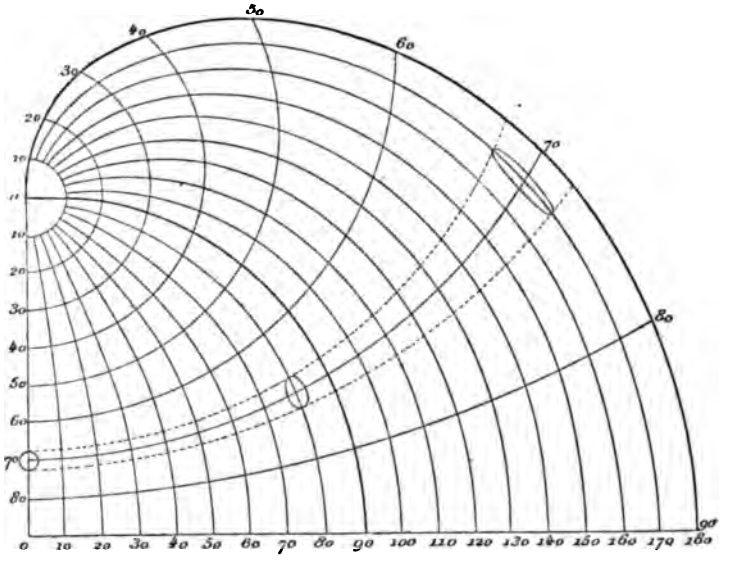


dien PE'P' et développés l'un au-dessus de l'autre de manière à se toucher par le milieu, en sorte que la ligne médiane *pe* soit le développement du méridien PE, la sphère sera représentée par une série de bandes circulaires. Sur chacune d'elles les angles et les dimensions linéaires seront conservés, ainsi que les surfaces; mais ces bandes laisseront entre elles de petites solutions de continuité. Sauf le méridien central, tous les autres méridiens seront discontinus. On ne peut faire disparaître ces déchirures sans sacrifier les dimensions linéaires.

Développement polyconique.

Supposons qu'on dilate progressivement chaque bande, de manière qu'elles se rejoignent toutes. Il est évident qu'un cercle infiniment petit, compris dans une zone de la sphère, se trouvera dilaté dans le sens des méridiens et transformé en une ellipse. Les

Fig. 107.



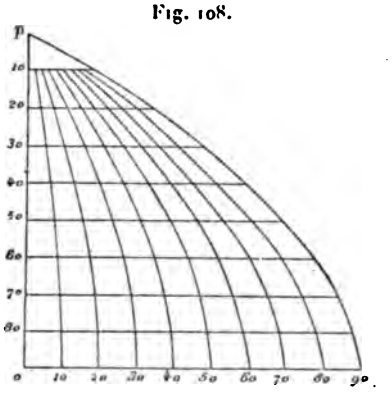
couples de diamètres conjugués de ces ellipses seront des transformées des couples de diamètres rectangulaires du cercle. Les angles seront altérés. Il en sera de même des longueurs, excepté dans le sens des parallèles.

Ce système, usité aux États-Unis et en Angleterre, convient assez bien, par ses parties centrales, à la représentation d'un continent entier. On voit, par la figure ci-dessus, quelle mappemonde singulière il fournirait, si l'on voulait y représenter, en une seule Planche, le monde tout entier.

Développement de Flamsteed, ou plutôt de Sanson.

Un autre moyen de faire disparaître les déchirures consiste à rectifier toutes ces bandes en leur conservant même longueur et même largeur. Il est évident que les surfaces seraient conservées; seulement tout rectangle infiniment petit se trouverait transformé.

Fig. 108.



sur les bords de la Carte, en un parallélogramme de même base et de même hauteur, et un cercle inscrit dans ce rectangle se trouverait transformé en une ellipse inscrite dans le parallélogramme. Les diamètres conjugués de l'ellipse répondraient encore ici aux diamètres conjugués du cercle.

Les méridiens ont la forme de sinusoïdes, car, si l'on place l'origine au pôle p, et qu'on porte les colatitudes sur l'axe des x en vraie grandeur, et les arcs de parallèles rectifiés sur des ordonnées, le méridien de 60°, par exemple, s'obtiendra en portant sur chaque ordonnée les $\frac{60}{90}$ du parallèle correspondant, et en joignant tous ces points d'un trait continu. Soit en général L la longitude de ce méridien; l'abscisse d'un de ses points sera $x = \lambda$; le rayon du parallèle sera $\sin\lambda$ (nous prenons le rayon pour unité), et la portion du parallèle qui doit servir d'ordonnée y sera $L \sin\lambda$, L étant exprimé en parties du rayon. On aura donc, pour l'équation de la courbe,

$$y = L \sin x.$$

Soit I l'inclinaison de ce méridien sur l'axe des x, au point où

se trouvera représenté, sous forme d'ellipse, un cercle ayant sur la sphère le rayon $d\lambda$. Les diamètres conjugués de cette ellipse seront $d\lambda$ et $\frac{d\lambda}{\cos I}$. Leur angle sera évidemment $90^\circ - I$. La surface de cette ellipse, $\pi d\lambda \frac{d\lambda}{\cos I} \sin(90^\circ - I)$, se réduira à $\pi(d\lambda)^2$; elle sera donc égale à celle du cercle correspondant de la sphère. On voit que les surfaces seront conservées.

Quant à l'angle I, altération angulaire, on a

$$\operatorname{tang} I = \frac{dy}{dx} = L \cos\lambda.$$

$90^\circ - I$ est l'angle sous lequel le méridien de la Carte coupe le parallèle au point considéré.

Voyons si ce système pourrait s'appliquer à une Carte comme celle de la France, et pour cela calculons I pour un point extrême du territoire, à Brest par exemple, où $\lambda = 41^\circ 30'$ et $L = 7^\circ = 0,1222$ en parties du rayon pris pour unité. On aura :

L.....	9,08669
$\cos\lambda$.....	9,8745
tang I.....	8,9614
I.....	5°14′

Alors le canevas de ce développement représenterait, dans cette région, l'angle droit sous lequel le méridien croise le parallèle par 84°46′. Cette altération étant intolérable, l'ingénieur géographe Bonne, qui avait à choisir un système de développement pour la Carte de France, dut rejeter celui-là.

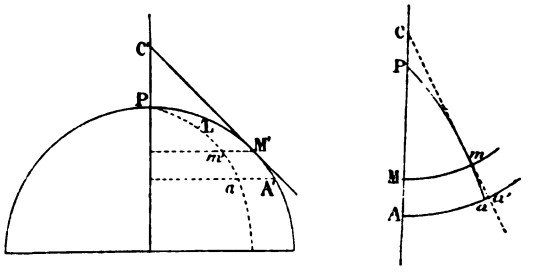
Carte de l'État-major (développement du colonel Bonne).

Le colonel Bonne imagina de plier toutes les bandes de la figure précédente sur le développement de la bande de 45°. Il parvint ainsi à réduire cette erreur de 5°14′ à 18′, tout en conservant les surfaces et en n'altérant les longueurs que de quantités très faibles.

Soit M′ le parallèle moyen qui traverse le pays à représenter, et dont la colatitude sera désignée par λ_1. Considérons un cône cir-

conscrit à la sphère le long de ce parallèle, cône dont l'apothème $C'M' = \tang\lambda_1$. Nous supposerons ce cône développé, de manière que la génératrice centrale soit CM. L'arc Mm, décrit de C comme centre avec $CM = \tang\lambda_1$ comme rayon, représentera le parallèle

Fig. 109.



moyen et ses divisions que nous porterons sur Mm en vrai grandeur. Pour construire le développement d'un autre parallèle tel que A', portons l'arc M'A', que l'on désignera par α, en MA, en sorte que $CA = \tang\lambda_1 + \alpha$, et avec ce rayon décrivons le cercle Aa, sur lequel nous porterons les divisions en longitude du parallèle A'. En faisant passer un trait continu par les divisions de même longitude des parallèles ainsi tracés sur la Carte, nous aurons un méridien de celle-ci.

Par exemple, soit L la longitude d'un méridien Pm' comptée en parties du rayon. La longueur du parallèle moyen correspondant Mm sera $L\sin\lambda_1$, et celle de l'arc Aa du parallèle de colatitude $\lambda_1 + \alpha$ sera $L\sin(\lambda_1 + \alpha)$. Rapportons cette courbe Pma à des coordonnées polaires ayant C pour pôle et Ca' pour axe. Nous aurons

$$\rho = Ca = Ca' = \tang\lambda_1 + \alpha,$$

$$\omega = \frac{aa'}{Ca'} = \frac{Aa'}{Ca'} - \frac{Aa}{Ca}.$$

Mais

$$\frac{Aa'}{Ca'} = \text{const.} = \frac{Mm}{Cm} = \frac{L\sin\lambda_1}{\tang\lambda_1} = L\cos\lambda_1;$$

c'est l'angle ACa'. On aura donc, pour l'angle aCa',

$$\omega = L\cos\lambda_1 - \frac{L\sin(\lambda_1 + \alpha)}{\tang\lambda_1 + \alpha}.$$

On obtiendrait l'équation du méridien en éliminant α entre ρ et ω. Mais il nous suffit de calculer l'angle I sous lequel cette courbe coupe le rayon vecteur :

$$\operatorname{tang} I = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = -L\,\frac{(\operatorname{tang}\lambda_1 + \alpha)\cos(\lambda_1 + \alpha) - \sin(\lambda_1 + \alpha)}{(\operatorname{tang}\lambda_1 + \alpha)^2}(\operatorname{tang}\lambda_1 + \alpha).$$

Pour appliquer cette formule à la Carte de France, faisons $\lambda_1 = 45^\circ$, remplaçons $\cos\alpha$ par 1 et $\sin\alpha$ par α; il viendra

$$\operatorname{tang} I = -L\sin 45^\circ\,\frac{(1+\alpha)(1-\alpha) - (1+\alpha)}{1+\alpha} = L\sin 45^\circ\alpha.$$

Pour le point le plus défavorablement situé de notre territoire, pour lequel $L = -7^\circ = -0{,}1222$, $\alpha = -3^\circ 30' = -0{,}061$, on trouve :

L.....	9,0871
sin 45°.....	9,8495
α.....	8,7860
tang I.....	7,7226
I.....	18′15″

Il s'en faut donc de 18′15″ qu'en ce point extrême le méridien de la Carte soit perpendiculaire au parallèle. Ainsi, les déformations angulaires du canevas sont peu sensibles.

Quant à la déformation linéaire, elle est nulle dans le sens du parallèle. Dans le sens du méridien, l'arc ds de cette courbe a pour expression

$$d\rho\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 I} = (1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2 I)\,d\alpha.$$

$\log\frac{1}{2}$.....	9,6990	
$\log\operatorname{tang}^2 I$.....	5,4452	
	5,1442	Nombre $= \frac{1}{72000}$

De ces deux directions conjuguées, celle du parallèle ne subit aucune altération linéaire ; celle du méridien en subit une totalement insensible dans la région la plus défavorable de la Carte de France.

Ce n'est pas à dire cependant que les longueurs mesurées sur la Carte dans les directions intermédiaires à celles-là ne soient pas *sensiblement* altérées. Nous aurons les directions où l'altération

linéaire atteint son maximum en cherchant les axes de l'ellipse infiniment petite qui représente sur la Carte autour du point a un cercle de rayon $d\alpha$ sur la sphère, ellipse dont nous connaissons ici deux diamètres conjugués $d\alpha$ et $\frac{d\alpha}{\cos I}$, comprenant l'angle $(90^\circ - I)$. Soient a et b les deux axes; nous aurons, par les théorèmes d'Apollonius,

$$ab = d\alpha \frac{d\alpha}{\cos I} \sin(90^\circ - I) = d\alpha^2,$$

ce qui prouve que l'ellipse a même surface que le cercle, et par suite que les aires sont conservées; puis

$$a^2 + b^2 = d\alpha^2 + \frac{d\alpha^2}{\cos^2 I} = 2\,d\alpha^2 + d\alpha^2 \operatorname{tang}^2 I.$$

On en tire

$$a - b = d\alpha \operatorname{tang} I,$$

$$a + b = 2\,d\alpha \quad (\text{en négligeant } \operatorname{tang}^2 I),$$

et par suite

$$b = (1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} I)\,d\alpha.$$

Ainsi, dans le sens de ce petit axe, qui est à très peu près une bissectrice de l'angle formé par les diamètres conjugués précédents, c'est-à-dire de l'angle formé sur la Carte par le méridien et le parallèle, l'altération de longueur est de $\frac{1}{2} \operatorname{tang} I = \frac{1}{378}$. Telle est la plus grande déformation de ce genre que présente notre Carte.

M. Tissot, ancien répétiteur de ce Cours, remarquant que cette altération est proportionnelle à α, c'est-à-dire à la distance du point considéré au parallèle moyen de la Carte, a conclu qu'on la diminuerait en remplaçant le parallèle adopté de 45° par un parallèle qui partagerait réellement la France en deux parties égales. Les deux colatitudes extrêmes étant 39° et 48°, il faudrait faire $\lambda_1 = 43^\circ 30'$. Alors, en effet, si le cône à développer était tangent à la sphère le long de ce parallèle-là, la plus grande altération de longueur serait de $\frac{1}{650}$, et la plus grande altération angulaire serait de $10'30''$ au lieu de $18'15''$.

Cette condition que les angles soient très peu altérés sur une Carte comme celle de la France, faite en vue de tous les services publics, est essentielle. Il faut, en effet, que les erreurs propres au

canevas de la Carte ne dépassent pas celles des levés topographiques qui viennent se rattacher à telle ou telle région de cette Carte.

On pourrait choisir d'autres systèmes parmi l'infinité de ceux qui n'altèrent pas du tout les angles; mais il y a une seconde condition non moins nécessaire : c'est que les *altérations de longueur* ne varient pas trop d'un bout à l'autre de la Carte, afin que l'échelle de celle-ci puisse être considérée comme constante dans l'étendue de chacune des feuilles dont la réunion forme la Carte d'ensemble.

Le système français satisfait bien à ces conditions, et c'est là ce qui a facilité le travail de sa construction, en permettant d'insérer, dans les polygones rigoureusement déterminés par la Géodésie, les levés topographiques de détail, au moyen d'une simple réduction d'échelle, peu différente d'une région à l'autre.

Les arcs de cercle de très grand rayon étant difficiles à tracer, on a calculé les coordonnées rectilignes de leurs points d'intersection avec les méridiens, ce qui montre combien il est peu utile de s'astreindre à représenter sur une grande Carte les cercles de la sphère par des arcs de cercle.

Enfin, ce système se prête très bien aux modifications rendues nécessaires par la figure de la Terre. Il suffit de remplacer dans les formules précédentes $\operatorname{tang}\lambda_1$ par $N \operatorname{tang}\lambda_1$, α par l'arc elliptique s dont nous avons donné le développement en série, et le rayon du parallèle $\lambda_1 + \alpha$ par $N \sin(\lambda_1 + \alpha)$, N étant calculé par la formule

$$\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2(\lambda_1 + \alpha)}}.$$

C'est effectivement ce qui a été fait.

La Carte de l'État-major, ordonnée dès 1808 par l'empereur, fut exécutée à partir de 1818 par le corps des ingénieurs géographes, qui se fondit en 1831 avec celui des officiers d'État-major. Le travail a duré quarante-cinq ans. Il se compose de deux cent soixante-neuf Cartes à l'échelle de $\frac{1}{80000}$; les originaux, conservés au Dépôt de la Guerre, sont à une échelle double et peuvent être consultés à tout instant par les ingénieurs de tout ordre qui ont des projets à étudier.

Pour les usages courants, on a fait une réduction à l'échelle de $\frac{1}{320000}$, en trente-deux feuilles, couvrant un espace de 12^{mq}, 60, don-

nant les routes et les cours d'eau, les divisions principales des cultures, le relief du terrain, et tous les chefs-lieux de commune, au lieu de tous les lieux habités, comme le fait la grande Carte.

Cette œuvre immense s'appuie sur un réseau de triangles dont la Carte géodésique de la *fig.* 86 donne une idée fort nette, en ce qui touche la Géodésie du premier ordre.

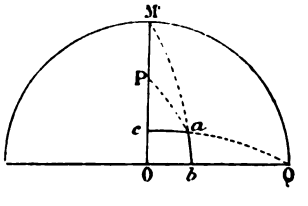
Le plan premier de ces travaux a été conçu et proposé par l'ingénieur géographe Bonne; à l'exécution du travail se rattachent encore les noms du colonel Puissant, de Corabœuf, Henry, Broussaud, Peytier, du chef d'escadron Hossard, depuis professeur d'Astronomie à l'École Polytechnique, et de beaucoup d'autres officiers du corps d'état-major. De jeunes officiers, placés sous la direction du colonel Perrier, revisent aujourd'hui les parties les plus importantes de cette grande triangulation afin de les tenir au courant de la Science; ces derniers viennent de terminer en Algérie des travaux analogues pour la Carte de cette région.

Ancienne Carte de France (Carte de Cassini).

Soient O le centre de la contrée qu'il s'agit de représenter, OM le méridien central, OQ un grand cercle perpendiculaire à ce méridien. Un point sera déterminé si l'on mesure en toises, sur la sphère, ses distances à ces deux cercles, c'est-à-dire les arcs *ab*, *ac*.

Adoptons pour la Carte un système semblable, en représentant par des droites les deux axes OM et OQ; le point *a* y sera porté

Fig. 110.



au moyen des deux coordonnées rectilignes *ab*, *ac*, égales en longueur aux arcs de même nom sur la sphère. Le canevas se réduit, comme on le voit, à des droites parallèles à la méridienne OM et à une autre série de droites parallèles à la perpendiculaire OQ. C'est assurément le plus simple et le meilleur de tous les systèmes pour

représenter une contrée de peu d'étendue; mais il offre déjà quelques inconvénients pour un pays aussi grand que la France.

Les coordonnées géographiques des divers points ne se lisent pas immédiatement sur la Carte de Cassini; on les déduit facilement, par le calcul, des coordonnées *ab* et *ac*. Le triangle rectangle P*ac* contient ces éléments, car l'angle en P = L et Pa = λ.

Ce système, abandonné pour la Carte de France, est encore journellement appliqué dans les services publics, pour les Cartes de détail; l'assemblage de ces Cartes se fait immédiatement et sans difficulté.

Quant au tracé des courbes de niveau et des hachures, nous renvoyons le lecteur aux Ouvrages spéciaux.

CHAPITRE XXVI.

CARTES DE MERCATOR (POUR LA NAVIGATION).

Depuis l'introduction de la boussole dans la navigation, au XIIIe siècle, on a pris l'habitude de déterminer, au départ, la direction de la route que le navire doit suivre pour arriver à un point donné; on maintient, à l'aide du gouvernail, l'axe du navire dans cette direction que la boussole permet de retrouver à tout instant et en tout lieu. Pour se rendre compte chaque jour de la position du navire, il faut tracer sur une Carte la route déjà parcourue. Or la ligne suivie par le navire coupe sous un angle constant les méridiens terrestres; c'est une courbe nommée *loxodromie*. Il serait donc utile d'avoir des Cartes sur lesquelles cette courbe serait représentée par une simple droite toujours facile à tracer. Pour cela, il suffit que les méridiens soient transformés en droites parallèles et que les angles soient conservés.

Les angles sont conservés lorsqu'un cercle infiniment petit tracé sur la sphère est représenté, sur la Carte, par un cercle infiniment petit plus ou moins dilaté. Autrement dit, la dilatation qu'un élément infiniment petit doit subir sur la Carte doit être la même dans deux directions perpendiculaires.

Prenons un système analogue à celui de Cassini, mais appliqué à l'équateur et non à un autre grand cercle perpendiculaire à un méridien. Les méridiens seront représentés par des droites espacées de degré en degré perpendiculairement à l'équateur; les parallèles par des droites équidistantes perpendiculaires aux premières. C'est là le système que les navigateurs employaient autrefois sous le nom de *Cartes plates*. Il est facile de voir que, sauf la direction des parallèles et des méridiens, toutes les autres directions autour d'un point quelconque pris hors de l'équateur sont altérées. En effet, la dilatation est nulle dans le sens des méridiens,

puisque ceux-ci sont représentés en vraie grandeur; mais elle est très sensible pour les parallèles, puisque ceux-ci, qui devraient décroître comme sur la sphère proportionnellement à $\sin\lambda$, ont partout même longueur. La dilatation, dans ce sens, est telle, qu'un élément $d\lambda$, pris sur le parallèle de colatitude λ, est représenté sur la Carte par $\frac{d\lambda}{\sin\lambda}$. Il faut donc, comme l'a montré Gérard Mercator, au XVIe siècle, dilater pareillement l'élément $d\lambda$ pris au même lieu sur le méridien, c'est-à-dire lui donner sur la Carte la longueur $\frac{d\lambda}{\sin\lambda}$. Cela revient à espacer de plus en plus les parallèles à mesure qu'on s'écarte de l'équateur.

La somme de ces éléments amplifiés d'un même méridien, depuis le parallèle λ jusqu'à l'équateur où $\lambda = 90^\circ$, sera

$$\int_\lambda^{90^\circ} \frac{d\lambda}{\sin\lambda}.$$

L'intégrale générale s'obtient en remarquant que, $\mathcal{L}$ désignant un logarithme népérien,

$$d\mathcal{L}\operatorname{tang}\lambda = \frac{1}{\operatorname{tang}\lambda}\,\frac{d\lambda}{\cos^2\lambda} = \frac{d\lambda}{\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{d2\lambda}{\sin 2\lambda};$$

elle est donc $\mathcal{L}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\lambda + \text{const}$. L'intégrale définie sera

$$\mathcal{L}1 - \mathcal{L}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\lambda = \mathcal{L}\cot\tfrac{1}{2}\lambda.$$

Ayant fait choix d'une longueur m pour les degrés de l'équateur, il faudra, pour tracer les parallèles de 89°, 88°, 87°, ..., les reporter à des distances de l'équateur égales à

$$m\mathcal{L}\cot\frac{89^\circ}{2},\quad m\mathcal{L}\cot\frac{88^\circ}{2},\quad m\mathcal{L}\cot\frac{87^\circ}{2},\quad \ldots.$$

Pour tenir compte de la figure elliptique de la Terre, on remplacera $d\lambda$ par l'élément de l'ellipse méridienne

$$ds = \mathrm{R}\,d\lambda = (1 - e^2)\frac{\mathrm{N}^3}{a^2}\,d\lambda,$$

et le rayon du parallèle, qui serait $r\sin\lambda$ sur une sphère de rayon r, par $\mathrm{N}\sin\lambda$. L'expression précédente devient, en prenant a pour

unité,

$$\int_{\lambda}^{90^\circ} \frac{(1-e^2)N^2 d\lambda}{N \sin\lambda} = \int_{\lambda}^{90^\circ} \frac{(1-e^2)\, d\lambda}{\sin\lambda(1-e^2\cos^2\lambda)}.$$

On pourrait obtenir l'intégrale complète, mais il suffit de réduire en série, en négligeant $e^4, \ldots$, et d'intégrer. Pour cela, multiplions haut et bas par $1+e^2\cos^2\lambda$ et supprimons les termes en e^4; il viendra

$$\int_{\lambda}^{90^\circ} \frac{1-e^2\sin^2\lambda}{\sin\lambda}\, d\lambda = \mathcal{L}\cot\frac{\lambda}{2} - e^2\cos\lambda.$$

Si l'on veut remplacer les logarithmes népériens par les logarithmes ordinaires, il faut diviser ceux-ci par $\log e = 0,4343$, et, pour obtenir le résultat en minutes, on devra multiplier les deux termes par $3437',8$, ce qui donne, avec $e^2 = 0,0068$,

$$7915',705 \log\cot\frac{\lambda}{2} - 23',36\cos\lambda.$$

Voici les valeurs des distances de divers parallèles à l'équateur:

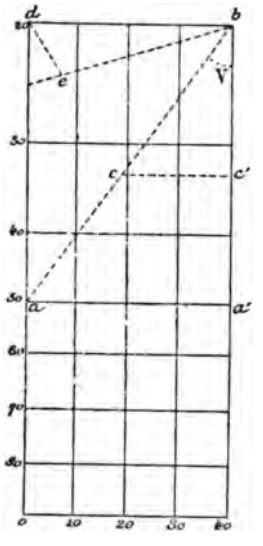
λ.	Distances.	$90^\circ - \lambda$.
0.....	∞	90°
20.....	99°. 4',2	70
30.....	75. 7,2	60
40..	57.36,5	50
50.....	43.27,7	40
60.....	31.16,7	30
70.....	20.17,1	20
80.....	9.59,1	10
90.....	0,0	0

Construisons le canevas de cette carte. L'équateur y sera représenté par une ligne droite, en vraie grandeur, bien entendu à l'échelle convenue. Divisons-le de 10° en 10°. Les méridiens seront des droites perpendiculaires à la droite équatoriale et passant par les points de division. Les parallèles seront des droites parallèles à l'équateur; leur espacement sera donné par les nombres précédents,

$$9^\circ,98,\ 20^\circ,28,\ 31^\circ,28,\ 43^\circ,49,\ 57^\circ,61,\ 75^\circ,12,\ 99^\circ,07.\ \ldots,$$

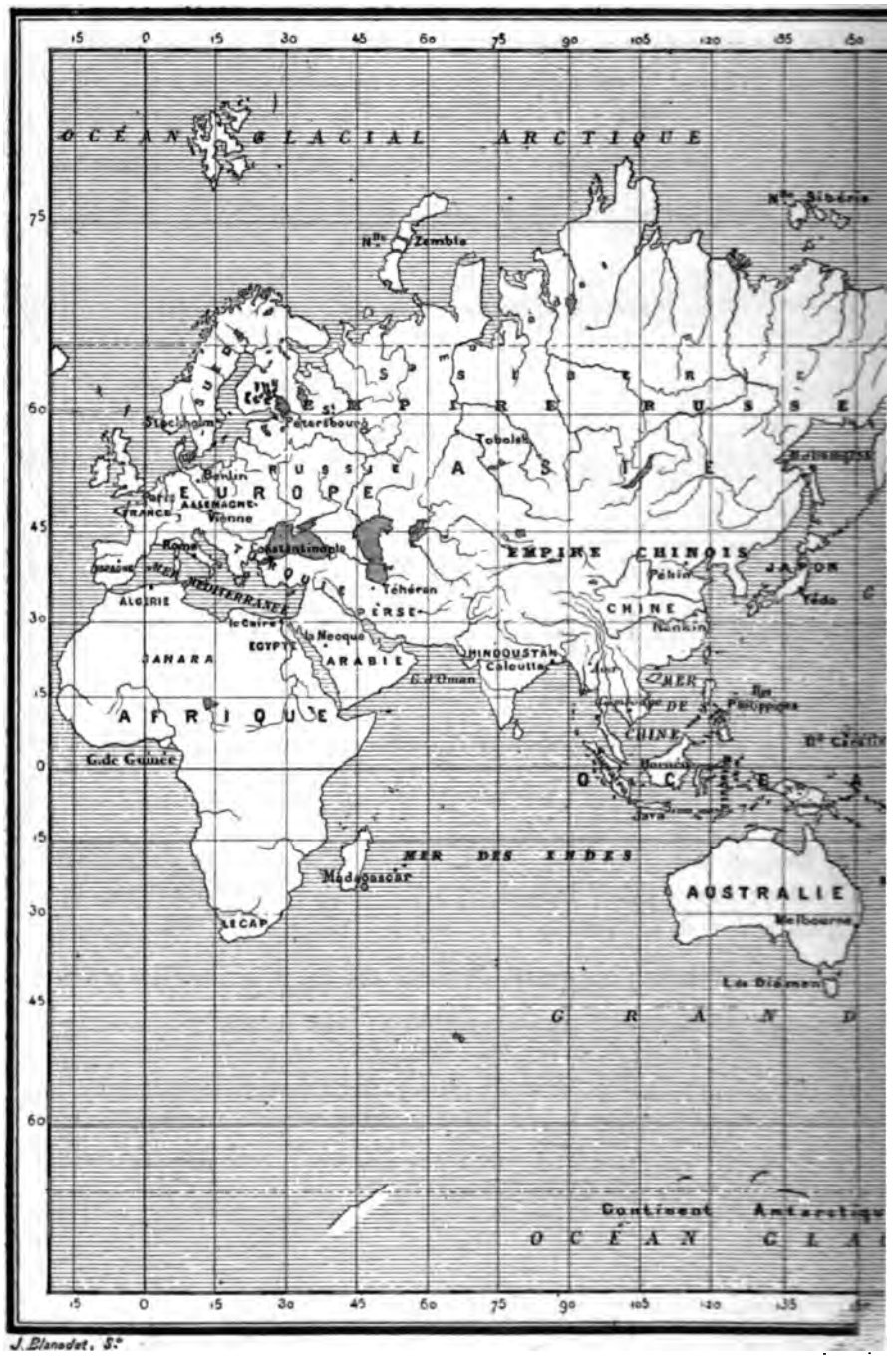
ou par ces mêmes nombres en centimètres si dans la figure ci-jointe nous prenons $0^m,01$ pour 1°. Le canevas ainsi construit jouit des propriétés suivantes : 1° la dilatation d'un élément linéaire de la sphère autour d'un point de colatitude λ est $\frac{1}{\sin\lambda}$ dans toutes les directions autour de ce point; cette dilatation reste la même tout

Fig. 111.



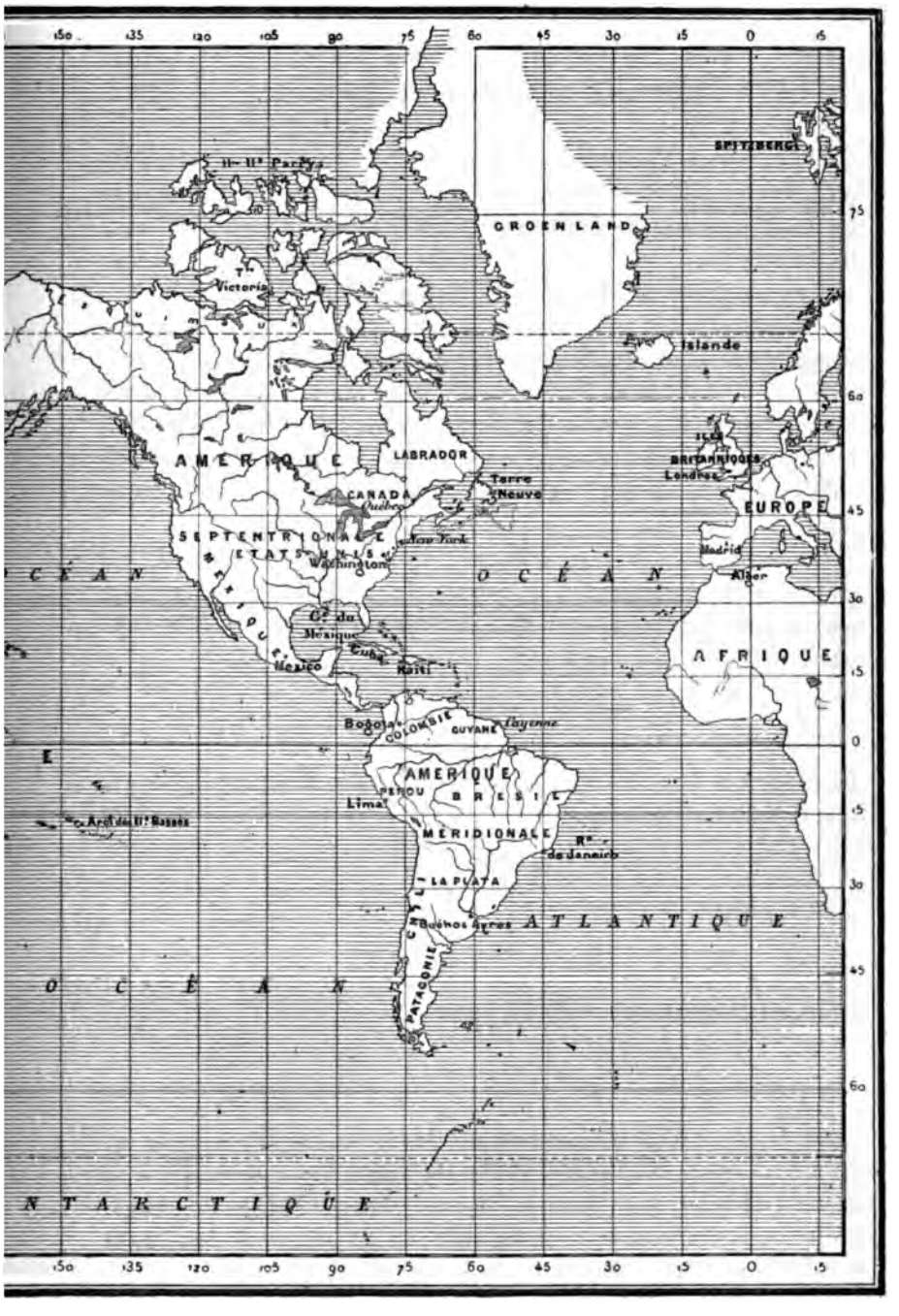
le long du parallèle de ce point; elle ne varie que d'un parallèle à l'autre; 2° une figure infiniment petite de la sphère tracée autour d'un point de colatitude λ est représentée sur la Carte par une figure semblable; le rapport de similitude est $\frac{1}{\sin\lambda}$; il n'en sera pas de même des figures de dimensions finies; 3° les arcs de loxodromie y seront représentés par des lignes droites, mais leurs éléments linéaires subissent une amplification croissante vers les pôles.

Nous reviendrons sur ce sujet dans le Chapitre relatif à la navigation; en attendant, nous présentons ici une mappemonde construite dans ce système.



J. Blanadet. Sc.

MERCATOR



GROENLAND
SPITZBERG
Islande
AMERIQUE
LABRADOR
CANADA
Québec
Terre Neuve
SEPTENTRIONALE
ETATS-UNIS
New York
Washington
MEXIQUE
Mexico
Cuba
Haïti
Bogota
COLOMBIE
GUYANE
Cayenne
AMERIQUE
PEROU
Lima
BRESIL
MERIDIONALE
Rio de Janeiro
LA PLATA
Buenos Ayres
CHILI
PATAGONIE
ATLANTIQUE
OCÉAN
OCÉAN
OCÉAN
NTARCTIQUE
ILES BRITANNIQUES
Londres
EUROPE
Madrid
Alger
AFRIQUE

Systèmes de Lambert, de Gauss, etc.

On retrouve l'intégrale précédente dans toutes les projections où les angles sont conservés. Si l'on voulait, par exemple, donner au développement de Mercator l'avantage d'avoir un pôle C sans lui ôter la propriété de conserver les angles, on ferait converger vers ce point les méridiens rectilignes sous des angles altérés dans un même rapport en posant $C = mL$, L et C étant les angles compris entre les méridiens sur la sphère et sur la Carte. Ce pôle C serait le seul point de la Carte où les angles ne seraient pas égaux à ceux de la sphère; partout ailleurs il est possible d'établir l'égalité. Il suffit, pour cela, d'espacer convenablement les parallèles circulaires dont le centre commun sera en C, et dont nous allons déterminer le rayon ρ.

Un petit cercle de rayon $d\lambda$ à la colatitude λ sur la sphère devra, pour que les angles soient conservés, être représenté sur la Carte par un petit cercle de rayon $d\rho$ à la distance ρ du point C. Or, l'axe transverse de ce dernier sera

$$\rho\, dC \text{ ou } m\rho\, dL = m\rho \frac{d\lambda}{\sin\lambda}.$$

La condition de la conservation des angles sera donc exprimée par la relation différentielle

$$d\rho = m\rho \frac{d\lambda}{\sin\lambda},$$

dont l'intégrale est

$$\mathcal{L}\rho = \mathcal{L}\tang^m \tfrac{1}{2}\lambda + \mathcal{L}K,$$

$\mathcal{L}K$ étant la constante. Cela revient à

$$\rho = K \tang^m \tfrac{1}{2}\lambda.$$

C'est la projection de Lambert ou de Gauss employée pour les Cartes récentes de Russie et du Hanovre. On ramènerait à la même condition analytique le canevas plus général de Lagrange. La projection stéréographique polaire en est un cas particulier, et répond à $m = 1$.

Si, au lieu de conserver les angles sur cette Carte à méridiens rectilignes convergents et à parallèles circulaires, on voulait conserver les surfaces, le cercle de rayon $d\lambda$ sur la sphère devrait être représenté sur la Carte par une ellipse équivalente. De là la condition

$$d\rho \times m\rho \frac{d\lambda}{\sin\lambda} = r^2 d\lambda^2,$$

en désignant par r le rayon de la sphère. L'intégrale est

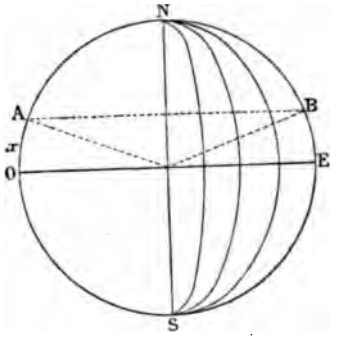
$$\tfrac{1}{2} m\rho^2 = -r^2 \cos\lambda + \text{const.}$$

Cette constante est évidemment r^2, d'où il résulte que la Carte sera construite d'après la projection de Lorgna, dont il sera question plus bas.

Projection homolographique de M. Babinet ou plutôt de Mollweide.

On divise en parties égales le diamètre OE de la Mappemonde; par les points de division on fait passer des ellipses ayant NS pour axe commun. La surface est ainsi divisée en fuseaux équivalents à la moitié des fuseaux sphériques. Soit AB un parallèle

Fig. 113.



qui doit représenter le parallèle de la latitude l, de sorte que OEBA soit la moitié de la demi-zone sphérique. La surface est

$$r^2 x + r^2 \sin x \cos x = \tfrac{1}{2}\pi r^2 \sin l$$

ou

$$2x + \sin 2x = \pi \sin l,$$

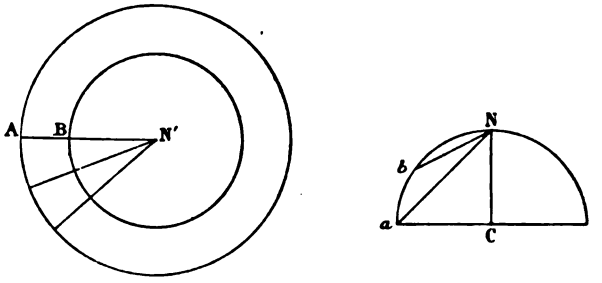
d'où l'on déduira les valeurs de x qui répondront aux diverses latitudes. De la sorte, les quadrilatères de ce canevas seront égaux en surface à la moitié de ceux de la sphère; mais les angles sont notablement altérés sur les bords.

Projection de Lorgna.

Elle s'applique aux contrées polaires; nous l'avons déjà déduite d'un développement plus général, celui de Gauss.

La surface d'une calotte sphérique ayant Nb pour arc est $2\pi r(r - r\cos \mathrm{N}b)$; or la corde N$b$ est moyenne proportionnelle

Fig. 114.



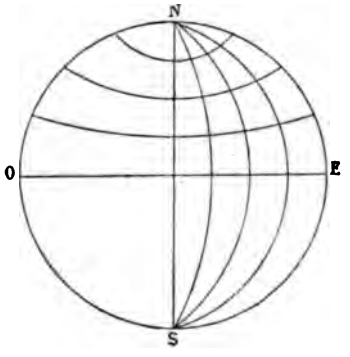
entre $2r$ et $r - r\cos \mathrm{N}b$; donc $\pi \overline{\mathrm{N}b}^2$ = surface de la calotte sphérique. Si du point N' comme centre d'une Mappemonde on décrit des cercles avec Na, Nb, ... comme rayons, les surfaces comprises entre les parallèles reproduiront exactement celles de la sphère. Il en sera de même des fuseaux correspondants à ceux de la sphère. Les surfaces seront conservées, ainsi que les angles des méridiens et des parallèles, mais non les autres angles ni les distances.

Projection globulaire.

Elle diffère de la projection stéréographique en ce que les cercles méridiens et les cercles parallèles sont également espacés. Le parallèle de 30° passe par les deux divisions de 30° sur le cercle limite

et par un point situé au tiers du rayon ON; ni les angles ni les

Fig. 115.



surfaces ne sont conservés, mais les altérations sont peu notables pour une Mappemonde.

Résumé.

En résumé, quel que soit le système de projection ou de développement adopté, un cercle infiniment petit de la sphère y sera représenté par une ellipse, et, comme toute ellipse est la projection d'un cercle de rayon convenable placé sous une certaine inclinaison, on peut dire avec M. Tissot que tout cercle ou toute figure infiniment petite de la sphère se trouve transformé, sur une Carte, en une simple projection orthogonale à une échelle déterminée. On pourrait dire aussi que l'on passe de la courbe sphérique à sa représentation en inclinant, d'un même angle, les ordonnées de la première rapportée à un système d'axes rectangulaires, et amplifiées au besoin dans un rapport donné.

Théorie générale des Cartes.

Au lieu d'examiner l'un après l'autre les divers systèmes, en nombre illimité, de projections ou de développements, et d'en chercher les propriétés caractéristiques, on peut suivre une marche inverse beaucoup plus générale. Elle consiste à rapporter les points d'une Carte quelconque à un système de coordonnées rectangulaires x et y, fonctions elles-mêmes des coordonnées λ

et L sur la sphère, puis à déterminer ces fonctions de manière à donner à la Carte des propriétés particulières.

Soient donc

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(\lambda, L), \\ y = F(\lambda, L) \end{cases}$$

les coordonnées x, y d'un point de la Carte répondant au point (λ, L) de la sphère. Si l'on considère L comme invariable, les équations (1) seront celles du méridien de ce point. En passant du point (λ, L) au point infiniment voisin $(\lambda + d\lambda, L)$, on aura un élément $d\lambda$ de ce méridien; les coordonnées, sur la Carte, de ce second point étant

$$x + \frac{df}{d\lambda} d\lambda,\ y + \frac{dF}{d\lambda} d\lambda \quad \text{ou} \quad x + \frac{dx}{d\lambda} d\lambda,\ y + \frac{dy}{d\lambda} d\lambda,$$

l'élément du méridien, que nous désignerons par a', sera

$$(2)\qquad a' = d\lambda \sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2}.$$

De même si nous faisons varier L en laissant λ constant, nous aurons, pour l'élément du parallèle,

$$b' = dL \sqrt{\left(\frac{dx}{dL}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dL}\right)^2},$$

et, si nous voulons que a' et b' représentent les diamètres conjugués de l'ellipse qui répond, sur la Carte, au cercle de rayon $d\lambda$ sur la sphère, il faudra poser

$$dL \sin\lambda = d\lambda,$$

d'où

$$(3)\qquad b' = \frac{d\lambda}{\sin\lambda} \sqrt{\left(\frac{dx}{dL}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dL}\right)^2}.$$

La tangente de l'inclinaison de l'élément a' sur l'axe des x étant $\frac{dy}{d\lambda} : \frac{dx}{d\lambda}$ et celle de l'élément b' étant $\frac{dy}{dL} : \frac{dx}{dL}$, on aura, pour l'angle

compris que nous avons désigné plus haut par $90^\circ - \mathrm{I}$,

$$(4) \qquad \operatorname{tang}(90^\circ - \mathrm{I}) = \frac{\frac{dy}{d\mathrm{L}}\frac{dx}{d\lambda} - \frac{dy}{d\lambda}\frac{dx}{d\mathrm{L}}}{\frac{dx}{d\mathrm{L}}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{dy}{d\mathrm{L}}\frac{dy}{d\lambda}} \quad (^1).$$

Si l'on veut que la Carte jouisse de la propriété de conserver les angles, il faudra exprimer, à l'aide de ces relations, que $a' = b'$ et que $\mathrm{I} = 0^\circ$. On arrive ainsi à une équation aux différences partielles du second ordre, dont l'intégrale donne une indication sur la nature des fonctions $f(\lambda, \mathrm{L})$, $\mathrm{F}(\lambda, \mathrm{L})$. Pour les déterminer entièrement, il suffira d'introduire de nouvelles conditions relatives, par exemple, à l'espèce de lignes qui doivent constituer le canevas : droites, arcs de cercle, courbes du second degré, etc.

Si l'on veut que les surfaces soient conservées, on exprimera que l'aire de l'ellipse dont les diamètres conjugués sont a' et b' est égale à l'aire du cercle de rayon $d\lambda$ sur la sphère. La condition $a'b' \cos \mathrm{I} = d\lambda^2$ conduira à une équation aux différences partielles du premier ordre dont l'intégrale fera connaître la forme de F pour une forme donnée de f.

Contentons-nous de deux exemples des plus simples du premier cas. Posons $f(\lambda, \mathrm{L}) = \frac{\cos \mathrm{L}}{\operatorname{tang} \lambda}$, et déterminons $\mathrm{F}(\lambda, \mathrm{L})$ de manière à conserver les angles. On aura

$$\frac{dx}{d\mathrm{L}} = -\frac{\sin \mathrm{L}}{\operatorname{tang} \lambda}, \quad \frac{dx}{d\lambda} = -\frac{\cos \mathrm{L}}{\sin^2 \lambda}.$$

En portant ces valeurs dans les équations

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \lambda}\left[\left(\frac{dx}{d\mathrm{L}}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\mathrm{L}}\right)^2\right],$$

$$\frac{dx}{d\mathrm{L}}\frac{dx}{d\lambda} = -\frac{dy}{d\mathrm{L}}\frac{dy}{d\lambda},$$

on trouve, en éliminant une solution parasite,

$$\frac{dy}{d\mathrm{L}} = -\frac{\cos \mathrm{L}}{\sin \lambda}, \quad \frac{dy}{d\lambda} = +\frac{\sin \mathrm{L} \cos \lambda}{\sin^2 \lambda}.$$

---

(1) On déduira, au besoin, des demi-diamètres conjugués a', b' et de l'angle compris I, les demi-axes a et b de l'ellipse de la Carte, au moyen des théorèmes d'Apollonius.

Or l'intégrale de

$$dy = -\frac{\cos L}{\sin\lambda}\,dL + \frac{\sin L\cos\lambda}{\sin^2\lambda}\,d\lambda$$

est

$$y \quad \text{ou} \quad F(\lambda, L) = -\frac{\sin L}{\sin\lambda}.$$

Il est facile de voir que le canevas se composera d'une série d'ellipses pour les méridiens et d'une série d'hyperboles pour les parallèles.

Admettons pour second exemple que le canevas doive être formé de droites parallèles équidistantes pour les méridiens. Il faudra poser

$$x = f(\lambda, L),$$
$$y = L.$$

Pour que $90^\circ - I$ soit droit, il faut que

$$\frac{dx}{dL}\,\frac{dx}{d\lambda} = 0.$$

Par conséquent, $\frac{dx}{dL} = 0$ et $x = f(\lambda)$. Si les angles doivent être conservés, il faut que $a' = b'$ ou que

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{1}{\sin\lambda}\,\frac{dy}{dL} = \frac{1}{\sin\lambda},$$

relation identique à celle que nous avons eue à intégrer (p. 353) pour les Cartes marines.

Les géomètres, dans leurs recherches à ce sujet, se sont attachés au cas où les lignes du canevas doivent être en totalité ou en partie des arcs de cercles; il suffit pour cela d'exprimer que le rayon de courbure des méridiens ou des parallèles est constant dans toute l'étendue de ces courbes. Mais cette condition manque d'intérêt dans la pratique; nous avons vu en effet, pour la Carte de France, qu'on n'a pu profiter de la figure circulaire des parallèles pour les tracer au compas sur les feuilles; il a fallu les déterminer point par point au moyen de coordonnées rectangulaires, les seules qu'on soit en état de tracer exactement sur ces immenses canevas. Nous laisserons donc de côté ces recherches, intéressantes au seul point de vue de l'analyse, et nous nous bornerons à appliquer les relations précédentes à un sujet plus pratique.

Coordonnées rectilignes de M. Tissot.

Proposons-nous de déterminer les fonctions f et F de manière à réduire au minimum les déformations linéaires et angulaires de la Carte d'un pays limité, tel que la France, l'Espagne, l'Égypte, etc. L'étendue en tous sens étant d'une douzaine de degrés, par exemple, si l'on place l'origine des coordonnées vers le milieu, en désignant par λ_1 la colatitude de ce point, et par $\lambda_1 + \alpha$, L les coordonnées sphériques d'un point quelconque de la contrée, α et L ne dépasseront pas 5° ou 6°, à peu près $\frac{1}{10}$ en parties du rayon. Dès lors, on sera en droit de développer x et y ou $f(\lambda, L)$, $F(\lambda, L)$ par la formule de Maclaurin, en séries procédant suivant les puissances de α et de L, et de négliger les termes du quatrième ordre, lesquels n'atteindront pas $\frac{1}{10000}$.

Supposons même, pour simplifier encore, que ce pays ait une certaine symétrie par rapport à un méridien, et prenons le méridien central développé sur la Carte pour axe des x, ce qui supprime les termes indépendants de L dans la série de y; on écrira, pour x et y, les expressions

$$(5)\qquad \begin{cases} x = m\alpha + n\,L + p\alpha^2 + q\,\alpha L + r\,L^2 + \ldots, \\ y = \qquad\quad n'L + \qquad\quad q'\alpha L + r'L^2 + \ldots, \end{cases}$$

et l'on n'aura plus qu'à disposer des indéterminées $m, n, p, \ldots$ de manière que les rapports d'altération linéaire $\frac{a'}{d\lambda}$, $\frac{b'}{d\lambda}$ ne diffèrent de l'unité que de petits termes en α et L, et de manière que l'altération angulaire I ne contienne dans son expression algébrique que des termes du même ordre.

Après avoir formé les dérivées partielles de x et de y en λ et L ($d\lambda$ ou $d\alpha$ représentant la même chose), on voit immédiatement que $\frac{a'}{d\lambda}$, c'est-à-dire

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2},$$

se réduira à $1 +$ termes en α et L si l'on fait $m = 1$; que

$$\frac{b'}{d\lambda} = \frac{1}{\sin\lambda}\left[(n + q\alpha + \ldots)^2 + (n' + q'\alpha + \ldots)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

se réduira pareillement à 1 + termes du premier ordre si l'on fait

$$n = 0 \quad \text{et} \quad \frac{n' + q'\alpha}{\sin\lambda} = 1, \quad \text{d'où} \quad n' + q'\alpha = \sin\lambda;$$

comme on a

$$\sin\lambda = \sin(\lambda_1 + \alpha) = \sin\lambda_1 + \alpha\cos\lambda_1,$$

à des termes près du second ordre, cela revient à prendre

$$n' = \sin\lambda_1, \quad q' = \cos\lambda_1,$$

ce qui réduit les équations (5) à

$$\begin{aligned} x &= \alpha + p\alpha^2 + q\alpha L + r L^2 + \ldots, \\ y &= \qquad\qquad L\sin\lambda + r' L^2 + \ldots. \end{aligned}$$

On s'assure aisément que l'altération angulaire I, dont l'expression est (en remplaçant la tangente par l'arc)

$$I = \frac{\dfrac{dx}{dL}\dfrac{dx}{d\lambda} + \dfrac{dy}{dL}\dfrac{dy}{d\lambda}}{\dfrac{dy}{dL}\dfrac{dx}{d\lambda} - \dfrac{dy}{d\lambda}\dfrac{dx}{dL}},$$

ne contient que des termes du premier ordre et des ordres suivants.

Faisons maintenant disparaître de ces trois expressions les termes du premier ordre.

Pour que $\frac{a'}{d\lambda}$, c'est-à-dire

$$[(1 + 2p\alpha + qL + \ldots)^2 + (L\cos\lambda + \ldots)^2]^{\frac{1}{2}}$$

ne contienne pas de termes du premier ordre, il faut faire $p = 0$, $q = 0$. Pour que $\frac{b'}{d\lambda}$ ou

$$\frac{1}{\sin\lambda}[(2rL + \ldots)^2 + (\sin\lambda + 2r'L + \ldots)^2]^{\frac{1}{2}}$$

n'en contienne pas non plus, il faut que $r' = 0$. Nous poserons donc

$$\begin{aligned} x &= \alpha + rL^2 + \text{ termes du troisième ordre,} \\ y &= \quad L\sin\lambda + \text{ termes du troisième ordre.} \end{aligned}$$

On aura alors, pour l'altération angulaire,

$$I = \frac{2rL + \sin\lambda_1 \cos\lambda_1 L + \ldots}{\sin\lambda_1 - 2r\cos\lambda_1 L^2 + \ldots} \quad (^1).$$

Les termes du premier ordre disparaîtront en posant

$$r = \tfrac{1}{2}\sin\lambda_1 \cos\lambda_1 = \tfrac{1}{4}\sin 2\lambda_1.$$

Il ne reste plus qu'à atténuer autant que possible l'influence des termes du troisième ordre. Écrivons

$$x = \alpha + \tfrac{1}{4}\sin 2\lambda_1 L^2 + \frac{A}{3}\alpha^3 - B\alpha^2 L + C\alpha L^2 + \frac{D}{3}L^3,$$

$$y = \qquad L\sin\lambda + \frac{A'}{3}\alpha^3 + B'\alpha^2 L - C'\alpha L^2 + \frac{D'}{3}L^3.$$

On en déduira les dérivées partielles de x et de y, et, par suite, on calculera les nouvelles expressions de $\frac{a'}{d\lambda}$, $\frac{b'}{d\lambda}$, I, ne contenant plus que des termes du deuxième ordre. En disposant des nouvelles indéterminées A, B, ... et en suivant la même marche que précédemment, on fera disparaître les termes du deuxième ordre dans I et dans la différence $\frac{a'}{d\lambda} - \frac{b'}{d\lambda}$, mais non dans ces deux altérations linéaires prises séparément. M. Tissot parvient ainsi aux expressions finales, en posant, pour abréger,

$$L\sin\lambda_1 = l \quad \text{et} \quad k = -\frac{\cos 2\lambda_1}{2\sin^2\lambda_1} - A :$$

$$x = \alpha + \tfrac{1}{2}\cot\lambda_1 l^2 + \frac{A}{3}\alpha^3 - B\alpha^2 l + k\alpha l^2 + \frac{B}{3}l^3,$$

$$y = \qquad \frac{\sin\lambda}{\sin\lambda_1} l + \frac{B}{3}\alpha^3 + A\alpha^2 l - B\alpha l^2 + \frac{k}{3}l^3 \quad (^2).$$

Les constantes indéterminées se trouvent réduites à deux ; la déformation linéaire, désormais la même, à très peu près, dans tous

(1) Il est permis de remplacer dans ces petits termes λ par λ_1.

(2) Le terme en α^3 revient ici parce que l'auteur ne suppose pas, comme nous l'avons fait, que l'axe des x se confonde avec le méridien central, mais qu'il lui est simplement tangent à l'origine.

les sens, a pour expression

$$A\alpha^2 - 2B\alpha l + (\tfrac{1}{2} - A)l^2.$$

Il ne reste plus qu'à profiter, dans chaque cas particulier, de l'indétermination des deux coefficients A et B, et du choix de l'origine (valeur de λ_1 et position du méridien central), pour réduire autant que possible le maximum de déformation linéaire. On y parvient aisément par quelques essais graphiques. Les points d'égale déformation linéaire étant situés sur des ellipses semblables, faciles à tracer sur un transparent, il suffit de faire glisser cette feuille sur une Carte provisoire de manière à comprendre la totalité du territoire dans le périmètre de l'ellipse la plus favorable. M. Tissot a montré qu'en adoptant ses formules on réduirait les déformations maxima, pour la France, à 25″ en angle et à $\frac{1}{1100}$ en longueur. Nous avons vu (p. 368) qu'elles vont, dans la Carte actuelle, à 18′ et à $\frac{1}{379}$. Quant à l'Espagne, la plus grande altération serait de 4″ pour les angles et de $\frac{1}{810}$ pour les distances. Celle des angles est pratiquement nulle. Pour ce qui est de la déformation linéaire, aucun système ne saurait la produire plus faible, car, par son expression même, où se trouvent les deux constantes A et B, on voit qu'il n'est pas possible de faire disparaître les termes du second ordre.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Pages.

AVERTISSEMENT V

SYMBOLES ET CONVENTIONS VII

INTRODUCTION I

Distinction fondamentale entre le monde solaire et l'univers 1
Le système solaire vu de dehors 5
Le système solaire vu de la Terre 8
Voûte céleste 10
Illusion provenant d'un mouvement de translation rectiligne 13
Illusion provenant d'un mouvement de rotation 15
Illusion provenant du mouvement de la circulation de la Terre autour du Soleil 17
Conception de l'univers dans l'antiquité 21
Classification des étoiles et mesure de leur distance 23
Mouvement de translation du système solaire 27
Mouvements propres des étoiles 29

PREMIÈRE PARTIE.

ASTRONOMIE SPHÉRIQUE. — DESCRIPTION DES INSTRUMENTS. — THÉORIE DES ERREURS. — GÉODÉSIE ET GÉOGRAPHIE MATHÉMATIQUE 31

LIVRE PREMIER. — **Théorie du mouvement diurne du ciel** 33

Description du mouvement diurne apparent du ciel 33

CHAPITRE I. — *Systèmes de coordonnées usités en Astronomie* 36

Coordonnées locales des étoiles 36
Mesure du temps. Jour sidéral. Heure 37
Coordonnées uranographiques 38
Coordonnées géographiques 40
Relations mutuelles de ces trois systèmes de coordonnées sphériques 41
Usage des globes céleste ou terrestre 46
Coordonnées zénithales 49

Pages.

CHAPITRE II. — *Transformation des coordonnées* 52

Transformation par déplacement de l'origine 52
Coordonnées sphériques. Manière de représenter une direction ou un plan 53
Condition pour que trois points de la sphère, donnés par leurs coordonnées angulaires, soient sur un arc de grand cercle 55
Changement de direction de l'axe des coordonnées sphériques 57
Application de ces formules aux coordonnées célestes 58
Trigonométrie sphérique 60
Formules calculables par logarithmes 60
Analogies de Delambre et de Neper 61
Triangles rectangles 63
Résolution des triangles quelconques 64
Sur les calculs trigonométriques 65
Formules différentielles des triangles sphériques 68
Développement en série des fonctions trigonométriques 70

CHAPITRE III. — *Théorie des instruments de mesure angulaire. Principaux organes de ces instruments* 74

Alidade à pinnules 74
Substitution des lunettes aux pinnules 75
Lunettes astronomiques 77
Mise au point. Réticule 78
Verniers 80
Vis de rappel. Vis micrométrique 81
Erreurs d'excentricité; leur élimination au moyen de verniers opposés 82
Erreurs de division 83

CHAPITRE IV. — *Description et usage du théodolite* 87

Rectification de l'axe principal. Fil à plomb. Niveaux 90
Niveau à bulle d'air 91
Rectification de l'axe secondaire 94
Rectification de la ligne de visée 95
Mesure des azimuts à l'aide du théodolite 95
Erreurs dues à une rectification imparfaite 97
Mesure des distances zénithales à l'aide du théodolite 100
Erreurs dues à une rectification imparfaite 101
Méthode de la répétition 103
Angles horizontaux 104
Angles verticaux 106
Méthode de la réitération 108
Lunette de repère 109

CHAPITRE V. — *Théorie de la réfraction atmosphérique* 110

Théorie de la réfraction, en tenant compte de la courbure de la Terre 113
Expression complète de la réfraction en termes finis 115
Développement en série de l'expression de la réfraction 117
Table des réfractions 119

Pages.

CHAPITRE VI. — *Détermination astronomique des coordonnées géographiques d'un lieu* 123

Méthode des hauteurs correspondantes 124
Circonstances favorables à la détermination exacte de l'heure et de la colatitude 125
Exemples numériques. — Détermination de l'heure 132
Détermination de la colatitude par des observations circumméridiennes. 133
Orientation 135

LIVRE DEUXIÈME. — **Grands observatoires astronomiques** 137

Pendule astronomique 138
Échappement à ancre dépendant et à repos 140
Remontoir 143
Minuterie 144

CHAPITRE VII. — *Lunette méridienne* 147

Observation du passage d'un astre aux fils de la lunette 149
Rectification de la lunette méridienne 151
Erreur de collimation 153
Erreur d'inclinaison 153
Erreur d'azimut 155
Extrait des registres de l'Observatoire de Paris 159
Collimateurs 161
Erreur personnelle 162
Suppression de l'observateur par l'enregistrement photographique des observations 164

CHAPITRE VIII. — *Cercle mural* 166

Lieu du zénith 169
Rectification du cercle mural 171
Observations faites à Paris 172
Réduction au méridien 173
Détermination de la colatitude 174
Corrections instrumentales 174
Erreur personnelle de l'observateur 175
Cercle méridien. Flexion des lunettes 176
Détermination simultanée de la colatitude et des constantes de la réfraction 178
Travaux d'un grand observatoire 180
Rôle des étoiles fondamentales 182

LIVRE TROISIÈME. — **Théorie des erreurs** 187

CHAPITRE IX. — *Erreurs systématiques* 189
Recherche expérimentale d'une cause d'erreur 189

CHAPITRE X. — *Théorie des erreurs accidentelles* 193

Équations de condition de forme quelconque. — Méthode des moindres carrés 195

Pages

Équations de condition ramenées à la forme linéaire 196
Erreur moyenne des observations..... 198
Erreur moyenne d'une fonction quelconque de quantités d'une précision donnée..... 200
Erreur moyenne des solutions fournies par la méthode de Legendre..... 203
Application de la méthode des moindres carrés à un exemple..... 204

CHAPITRE XI. — *Observations d'inégale précision*..... 208

CHAPITRE XII. — *Application du Calcul des probabilités à la théorie des erreurs* 214

Enquête *a priori* sur la loi de probabilité des erreurs fortuites..... 215
Recherche empirique de cette loi..... 218
Signification du paramètre *h*..... 224
Erreur probable 225
Table de probabilités..... 226
Démonstration de la méthode des moindres carrés..... 230
Objections qu'on fait communément à la méthode des moindres carrés.. 230
Conclusion 235

LIVRE QUATRIÈME. — **Géodésie**..... 237

CHAPITRE XIII. — *Anciennes mesures de la Terre*..... 240

Mesure d'Ératosthènes..... 240
Prétendue mesure de Posidonius..... 242
Évaluation de Ptolémée..... 244
Vérification de l'évaluation de Ptolémée par les Arabes..... 244
Mesures modernes..... 244
Fernel, Snellius, Norwood..... 245
Picard et les Cassini 246
Expéditions en Laponie et au Pérou..... 247

CHAPITRE XIV. — *Opérations géodésiques pour la mesure d'un arc de méridien*..... 249

Choix des stations. — Forme des triangles sphériques..... 250
Mesure des angles des triangles..... 251
Excès sphérique..... 253
Signaux et réduction au centre de la station..... 254
Tour d'horizon 256
Signaux lumineux; phares ou héliotropes..... 257
Mesure des bases..... 260
Degré de précision de la mesure d'une base 262
Réduction de la base au niveau de la mer..... 263
Jonction de la base avec le réseau..... 263

CHAPITRE XV. — *Calcul des triangles géodésiques*..... 265

Réseau géodésique français..... 265
Théorème de Legendre..... 266
Compensation des angles d'un triangle..... 270

Pages.

Compensation d'un réseau de triangles 271
Observations astronomiques pour déterminer la direction et l'amplitude de la méridienne 275
Calcul de la méridienne par segments 276

CHAPITRE XVI. — *Sur la courbure des surfaces convexes* 278

Indicatrice; rayons de courbure principaux 278
Courbure moyenne 280
Lignes de courbure 283
Lignes géodésiques 284

CHAPITRE XVII. — *Formules et données numériques applicables à l'ellipsoïde terrestre* 287

Rayons de courbure principaux 287
Rectification d'un arc d'ellipse 289
Éléments de l'ellipsoïde terrestre 290

CHAPITRE XVIII. — *Arcs de méridiens mesurés en divers lieux* 293

Détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre 295

CHAPITRE XIX. — *Irrégularités de la surface de niveau. Attractions locales* 300

Attraction des montagnes 301
Constitution intérieure de la croûte terrestre 303

CHAPITRE XX. — *Système métrique* 309

CHAPITRE XXI. — *Coordonnées géographiques. Arcs de parallèle* 314

Réduction à l'ellipsoïde 317
Arcs de parallèle 319

CHAPITRE XXII. — *Nivellement géodésique. Éléments locaux, etc* 321

Distances zénithales réciproques et simultanées 321
Cas d'une seule distance zénithale 322
Théorie de la réfraction géodésique 322

Variations diurnes du coefficient m 324
Précision du nivellement géodésique comparée à celle du nivellement ordinaire 324
Altitude absolue d'une station; dépression de l'horizon de la mer 325
Description astronomique d'un grand pays 326
Calcul des éléments locaux de l'ellipsoïde terrestre : grande normale, distance au centre de la Terre, colatitude géodésique, etc 327

CHAPITRE XXIII. — *Intensité de la pesanteur en un lieu donné* 329

Attraction de la Terre sur un point extérieur 331

Pages.

LIVRE CINQUIÈME. — **Géographie** 333

CHAPITRE XXIV. — *Cartes par projection* 334

Projection orthographique 334
Projection stéréographique 336

CHAPITRE XXV. — *Développements* 342

Développement polyconique 343
Développement de Flamsteed, ou plutôt de Sanson 344
Carte de l'État-major (développement du colonel Bonne) 345
Ancienne Carte de France (Carte de Cassini) 350

CHAPITRE XXVI. — *Systèmes divers* 352

Cartes de Mercator (pour la navigation) 352
Systèmes de Lambert, de Gauss, etc 358
Projection homalographique de M. Babinet ou plutôt de Mollweide 359
Projection de Lorgna 360
Projection globulaire 360
Résumé 361
Théorie générale 361
Coordonnées rectilignes de M. Tissot 365

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

6289 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.